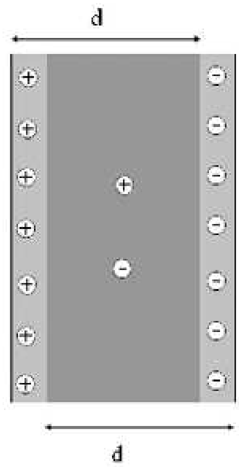
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2004/2005

Übungsblatt 6, Ausgabe 30.11.2004, abzugeben bis 07.12.2004
Besprechung in den Übungen in der 8. Semesterwoche (08.-10. Dez.)

25. **Plasmaschwingungen; (10 Punkte)**
Ab einer Höhe von ca. 100 km über dem Erdboden werden die Moleküle der Atmosphäre ständig durch die kurzwelligen Anteile des Sonnenlichts dissoziiert und ionisiert. Während des Tages können Elektonen- bzw. Ionenkonzentrationen von $n = 10^7 cm^{-3}$ erreicht werden. Solche Gase aus geladenen Teilchen nennt man ein Plasma.

a) Die Wechselwirkung eines solchen Elektronengases mit elektromagnetischer Strahlung kann mit dem folgenden Bild verstanden werden:
Eine beliebig weit ausgedehnte Schicht der Dicke d und der relativen Dielektrizitätkonstanten ε sei mit einer positiven Ladungsdichte ρ_+ und einer betragmäßig gleichen negativen Ladungsdichte ρ_- homogen ausgefüllt. Im Ruhezustand fallen die Ladungsschwerpunkte zusammen. Werden nun beide Schichten gegeneinander verschoben, so wird sich eine rückstellende Kraft einstellen, da die Ladungsschwerpunkte der Schichten nicht mehr übereinstimmen (siehe Abbildung). Bestimmen Sie diese Kraft in Abhängigkeit von der relativen Verschiebung der beiden Schichten gegeneinander. Das System wird nach der Auslenkung eine harmonische Schwingung ausführen.



Warum? Bestimmen Sie die Kreisfrequenz dieser Schwingung. Diese nennt man die Plasmafrequenz. (2 Punkte)

b) Eine mikroskopische Beschreibung der Eigenschaften kann mit Hilfe des Lorenzschen Oszillatormodells (Aufgabe 11) gefunden werden wenn man die Dämpfung vernachlässigt. Warum entfällt bei der Betrachtung für ein Gas aus Elektronen auch der Term welcher die Federkonstante enthält? Bestimmen Sie in Anlehnung an Aufgabe 11 die Dielektrische Funktion $\varepsilon(\omega)$ und skizzieren sie diese.

Welcher Zusammenhang gilt hier für die Plasmafrequenz? Man vergleicht mit Teilaufgabe a). (2 Punkte)

c) Geben Sie die Plasmafrequenz für Kupfer, $n_\varepsilon = 8,4^\star 10^{22} cm^{-3}$ und für die Ionosphäre bei ihrem maximalen Ionisationsgrad an.
Wie groß wäre die Plasmafrequenz für einfach geladene Stickstoffionen der gleichen Konzentration wie die der Elektronen? (1 Punkt)

d) Eine ebene Welle der Frequenz ω trifft auf diese Schicht. Bestimmen Sie was mit dieser Welle passiert falls deren Frequenz größer bzw. kleiner als die Plasmafrequenz ist. Welche Konsequenzen lassen sich daraus für die Kommunikation mit Satelliten aber auch mit Objekten auf der Erdoberfläche die nicht direkt mit elektromagnetischen Wellen zu erreichen sind (unterhalb des Horizonts liegen) ableiten. (2 Punkte)

e) Nun soll der Effekt einer solchen Schicht auf ein Wellenpaket bestimmt werden. Dieses sei durch

$$E = \int \frac{dk}{2\pi} e^{i(\omega(k)t-kz)} \tilde{E}(k)$$

gegeben, wobei für alle an dem Wellenpaket beteiligten Frequenzen $\omega(k) > \omega_p$ gelten soll. Leiten Sie aus der bekannten Dispersionsrelation die Gruppengeschwindigkeit $v_g(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ und die Phasengeschwindigkeit v_p ab. Vergleichen Sie mit der Lichtgeschwindigkeit. (3 Punkte)

26. **Klassischer Dopplereffekt; (7 Punkte)**
In manchen Skigebieten gibt es sogenannte Transfer-Skilifte. Dies sind Lifte, die keinen Höhenunterschied überwinden, sondern z.B. im Tal dazu dienen, die Skifahrer von einem Berglift zu einem anderen zu transportieren. Dementsprechend können diese Lifte von beiden Seiten benutzt werden und verlaufen meist sehr flach über dem Boden.

a) Nehmen Sie nun an, dass in einer der Gondeln des Lifts mehrere Skifahrer (A) sitzen die sich unterhalten. Am Boden unter dem Lift stehen ebenfalls Personen (B) auf der Piste. Der Lift transportiert die Gruppe A auf die Gruppe B mit der Geschwindigkeit $v = 36km/h$ zu. Wenn die Gruppe A Schallwellen mit der Frequenz f aussendet, welche Frequenz nimmt dann die Gruppe B wahr? Vergrößert oder verkleinert sich die Frequenz? Wie groß ist dementsprechend die Änderung der Wellenlänge? Geben Sie die Frequenz- und Wellenlängenänderung für eine Frequenz von 100 Hz und einer Schallgeschwindigkeit von $c = 330m/s$ mit drei Stellen Genauigkeit an. (Höhenunterschiede zwischen Personen im Lift und am Boden können vernachlässigt werden.) (2 Punkte)

b) Nehmen Sie nun an, dass die Personen B den Leuten im Lift A etwas zurufen während diese noch auf sie zufahren. Welche Änderung in der Frequenz bzw. Wellenlänge nehmen Personen in der Gruppe A war? Berechnen Sie diese Änderungen für die in a) angegebenen Größen. (2 Punkte)

c) Wie ändern sich die Ergebnisse aus a) und b), wenn die Personen im Lift an den Personen am Boden vorbei gefahren sind? Geben Sie die Änderungen in der Frequenz bzw. Wellenlänge an. Welche Werte ergeben sich für die oben angegebene Größen? (1 Punkt)

d) Die Gruppe A im Lift begegnet nun einer Gruppe C, die im Lift genau in die andere Richtung fährt. Bestimmen Sie die Änderungen in Frequenz und Wellenlänge, die die Personen in Gruppe C wahrnehmen, wenn ihnen jemand aus Gruppe A etwas zuruft.

Welche Werte ergeben sich für die Änderungen? *Hinweis*: Nehmen Sie an Gruppe B wäre immer noch zwischen Gruppe A und Gruppe C (2 Punkte)

27. **Strahlungsdämpfung des klassischen Atoms; (7Punkte)**
Um 1910 war durch die Rutherfordschen Streuversuche bekannt, dass Atome aus positiv geladenen Kernen und einer Hülle von (negativ geladenen) Elektronen im Abstand von ca. $x_0 = 10^{-10}m$ bestehen. Nach den Gesetzen der klassischen Mechanik können die Elektronen nur aufgrund der Zentrifugalkraft einen endlichen Abstand zum Kern halten und müssen sich deswegen auf Keplerbahnen (Ellipsen oder Kreisen) bewegen. Dabei erfahren sie ständige Ablenkung und damit Beschleunigung, weswegen sie gemäß der Elektrodynamik ständig elektromagnetische Energie ausstrahlen. Da diese Energie nur aus der Bewegungsenergie der Elektronen stammen kann, muss diese abnehmen, und damit müssen die Elektronen in den positiv geladenen Kern stürzen. Im Folgenden soll die Lebenszeit eines Atoms gemäß der klassischen Physik abgeschätzt werden.

a) Nach dem Lorentzschen Oszillatormodell (Blatt 2, Aufgabe 11) wird die Auslenkung $x(t)$ eines Elektrons (Ladung $-e$, Masse m) durch einen gedämpften harmonischen Oszillator beschrieben (es sei $\omega_0 > \gamma > 0$)

$$m\Big(\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)\Big) = 0.$$

Lösen Sie die Differenzialgleichung mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = 0$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ für $t > 0$. Welche Näherungen darf man für schwache Dämpfung ($\gamma \ll \omega_0$) machen? (1 Punkt)

b) Die pro Frequenz und Raumwinkel ausgestrahlte Energie ergab sich in der Vorlesung für einen linearen elektrischen Dipol zu:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}|\tilde{d}(\omega)|^2 \sin^2\vartheta,$$

wobei ϑ der Streuwinkel ist.
Bestimmen Sie durch Integration über den Raumwinkel die in alle Richtungen ausgestrahlte Energie pro Frequenz: (1 Punkt)

$$\frac{dW}{d\omega} = \int d\Omega \frac{d^2W}{d\omega d\Omega}.$$

c) Die gesamte ausgestrahlte Energie ergibt sich durch Integration über alle Frequenzen:

$$W = \int_0^\infty d\omega \frac{dW}{d\omega}.$$

Formen Sie den Ausdruck für die pro Frequenz und Raumwinkel ausgestrahlte Energie um, indem Sie folgende Beziehung verwenden:

$$\dot{d}(t) = ev(t)$$

Wie lautet der Ausdruck für die Fouriertransformierte der Geschwindigkeit $\tilde{v}(\omega)$. Setzen Sie $v(t<0) = 0$ für die Fouriertransformation. Diskutieren Sie den Ausdruck $\frac{dW}{d\omega}$ für $\gamma = 0$. Machen Sie sich anhand des Verhaltens für $\omega \to 0, \infty$ und den Extremwerten klar, dass man für $\omega > 0$ und kleiner Dämpfung $0 < \gamma \ll \omega_0$ den Ausdruck $\frac{dW}{d\omega} \approx \frac{\omega_0^4}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}$ erhält. Wie lautet schließlich W? (3 Punkte)

d) Mit der Annahme, dass die Dämpfung des Oszillators aus den Strahlungsverlusten (sog. Strahlungsdämpfung) resultiere, lässt sich durch den Vergleich der potenziellen Energie V_0 des harmonischen Oszillators zum Zeitpunkt $t = 0$ mit W der Wert von γ selbstkonsistent bestimmen. Wie lange lebt ein klassisches Atom, dessen Eigenfrequenz im Bereich von $\nu_0 \approx 10^{15}$ Hz liegt, d.h. Licht im sichtbaren Bereich aussenden kann? (D.h. wie groß ist γ?). (2 Punkte)

28. **Tscherenkow Strahlung; (8 Punkte)**
Die Reaktorkerne wassermoderierter Atomreaktoren leuchten bläulich aufgrund der Tscherenkow Strahlung, die geladene Teilchen mit Überlichtgeschwindigkeit aussenden. Dies ist möglich, da die Lichtgeschwindigkeit $\frac{c}{n}$ in einem Dielektrikum wie Wasser ($n_{\text{Wasser}} \approx 1,33$) kleiner als im Vakuum ist.

a) Die zeitlich gemittelte, in das Winkelelement $d\Omega$ um die Richtung von $\mathbf{k}$ und im Bereich $d\omega$ um die Frequenz ω ausgestrahlte Leistung lautet in einem Dielektrikum mit Brechungsindex n:

$$P = \frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{n}{32\pi^2\varepsilon_0 c}\left|\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k},\omega)\right|^2$$

wobei $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}n$ und die Fouriertransformierte Stromdichte auftritt:

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k},\omega) = \int dt \int d^3\mathbf{r} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\mathbf{j}(\mathbf{r},t).$$

Verifizieren Sie für $n = 1$ den Ausdruck der Vorlesung. (1 Punkt)

b) Ein Elektron, das mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$ in $\hat{\mathbf{z}}$-Richtung fliegt, erzeugt den Strom $\mathbf{j} = -\frac{e}{n}\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$. Bestimmen Sie $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k},t)$ durch Fouriertransformation. (1 Punkt)

c) Das Elektron sei zum Zeitpunkt $t = T$ am Ort $\mathbf{r} = z_1\hat{\mathbf{z}}$. Der Strahlungsverlust $P(z)$ pro Streckenelement dz ergibt sich durch Transformation des Fourierdoppelintegrals:

$$\begin{aligned} P &= \text{konst.}\int dtdt' e^{-i\omega(t-t')}\tilde{j}_z(\mathbf{k},t)\tilde{j}_z^*(\mathbf{k},t') \\ &= \frac{\text{konst.}}{v}\int dzd\tau e^{-i\omega\tau}\tilde{j}_z(\mathbf{k},vz+\frac{\tau}{2})\tilde{j}_z^*(\mathbf{k},vz-\frac{\tau}{2}) =: \int dzP(z) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$P(z) = \frac{\omega^2 e^2}{16\pi\varepsilon_0 vcn}\left(\frac{n^2v^2}{c^2} - 1\right)\delta\left(\omega(1 - \frac{nv}{c}\cos\theta)\right)$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-ia\tau} = 2\pi\delta(a)$ (2 Punkte)

d) Begründen Sie nach Einstein, dass in Vakuum ($n = 1$) eine unbeschleunigte Ladung nicht strahlt. (1 Punkt)

e) Schätzen Sie nach Einstein ab, welche Energie Elektronen benötigen, um in Wasser Tscherenkow Strahlung zu emittieren. (1 Punkt)

f) Wie groß ist der maximale Winkel zur Bewegungsrichtung in den Tscherenkow Strahlung emittiert wird (dieser ist immer noch so klein, dass genähert werden darf)? (1 Punkt)

g) Wie lautet die in alle Richtungen ausgestrahlte Leistung $\int d\Omega P(z)$? (1 Punkt)