UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2004/2005

Übungsblatt 2, Ausgabe 02.11.2004, abzugeben bis 09.11.2004
Besprechung in den Übungen in der 4. Semesterwoche (10.-12. Nov.)

9. **(Antireflexbeschichtung; 5 Punkte)**

   a) Die Lichtreflexion einer Glasplatte kann stark reduziert werden, wenn die Glasoberfläche mit einer (oder mehreren) dünnen Schichten eines Materials mit geeignetem Brechungsindex überzogen wird, denn die an den Grenzflächen reflektierten Wellen können sich praktisch aufheben. Berechnen Sie den Brechungsindex n_2 und die Dicke d_2 der Vergütungsschicht, die für senkrecht einfallendes Licht der Wellenlänge $\lambda_1 = 0.589\mu m$ Reflexfreiheit ergibt unter Verwendung der entsprechenden Fresnelformel. Benutzen Sie für Luft $n_1 = 1$ und für die Glasscheibe $n_3 = 1.5$. (2 Punkte)

   b) Das gleiche Prinzip wird auch dafür benutzt, die Reflexion an der Oberfläche einer Solarzelle möglichst gering zu halten, damit viel Licht in die Solarzelle gelangt und zur Stromgewinnung beitragen kann. Dazu wird auf die Oberfläche einer Solarzelle aus kristallinem Silizium (Brechungsindex $n_6 = 3.8$) eine Antireflexschicht aufgebracht, bevor die Solarzelle unter einer Glasscheibe (Brechungsindex $n_4 = 1.5$) verkapselt wird. Berechnen Sie die optimale Dicke und den Brechungsindex der benötigten Antireflexschicht bei senkrechtem Einfall von Licht der Wellenlänge $\lambda_2 = 0.650\mu m$ (Maximum der Photonenzahl des Sonnenspektrums). (1 Punkt)

   c) Oft werden auch doppellagige Antireflexschichten verwendet, mit denen die Reflexionsverluste von Solarzellen ohne die Verkapselung unter Glas minimiert werden können. Berechnen Sie für senkrechten Einfall von Licht der Wellenlänge $\lambda_2 = 0.650\mu m$ die beiden Brechungsindizes n_8 und n_9 sowie die Dicken d_8 und d_9 der optimalen Antireflexschichten (Brechungsindex von Luft $n_7 = 1$, Brechungsindex der Solarzelle $n_10 = 3.8$). (2 Punkte)

10. **($\lambda/2$ und $\lambda/4$-Plättchen; 5 Punkte)**
    Man betrachte Licht einer Na-Dampflampe ($\lambda = 589nm$, Ausbreitungsrichtung z), welches ein doppelbrechendes Plättchen senkrecht durchstrahlt. Die optisch schnelle Achse des

Plättchens liege entlang x, d.h. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichts und unter einem Winkel von $\alpha = 45°$ zur Richtung der linear polarisierten einfallenden Lichtwelle (E-Feld), die durch den linearen Polarisator P erzeugt wird. Der Analysator A stehe parallel zu P. Berechnen Sie die Dicke des Plättchens, für die die durch A transmittierte Intensität verschwindet. Dies entspricht einer Phasenverschiebung zwischen der x- und y-Komponente von E um eine halbe Wellenlänge. Als doppelbrechendes Material nehmen wir Kalkspat ($n^{\parallel} = 1.486$, $n^{\perp} = 1.658$) bzw. kristallinen Quarz ($n^{\parallel} = 1.5443$, $n^{\perp} = 1.5534$). Diskutieren Sie den Polarisationszustand nach dem $\lambda/2$-Plättchen für den Fall $\alpha = 10°$. Was passiert in beiden Fällen ($\alpha = 45°$ und $\alpha = 10°$), wenn die Dicke der Platte halbiert wird ($\lambda/4$-Plättchen)? (5 Punkte)

11. **(Lorentzsches Atommodell; 10 Punkte)**
Dem Materiemodell des polarisierbaren Dielektrikums liegen verschiedene Modelle gebundener Punktladungen zugrunde. Dies soll in der folgenden Aufgabe diskutiert werden.

Aus der Vorlesung sind Ihnen die Maxwellgleichungen ohne äußere Ladungen und Ströme in folgender Form bekannt:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \partial_t \boldsymbol{D}.$$

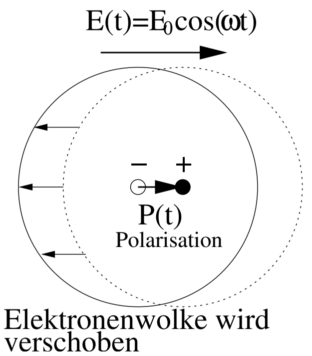
Bei einem polarisierbaren Dielektrikum werden diese noch durch folgende Materialgleichungen ergänzt:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}.$$

Die aus der Vorlesung bekannte Bewegungsgleichung für die Polarisation soll im Folgenden (erweitert durch einen Dämpfungsterm) abgeleitet werden.

$$\partial_t^2 \boldsymbol{P} + \omega_0^2 \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \omega_P^2 \boldsymbol{E}$$

a) Leiten Sie das Modell des polarisierbaren Dielektrikums aus dem Lorentzschen Oszillator Modell ab. Betrachten Sie dazu ein einzelnes Elektron (Ladung $-e$, Masse m_e), welches durch eine Feder (mit Federkonstanten D) fest gebunden ist. Erweitern Sie die Bewegungsgleichung für die Auslenkung $x(t)$ des Elektrons um einen Newtonschen Dämpfungsterm $-m_e\gamma\partial_t x$, sowie eine äußere Kraft durch eine elektromagnetische Welle mit der Frequenz ω.



Zur Lösung der Differenzialgleichung machen Sie dabei folgenden Ansatz:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0(\omega)e^{i\omega t}.$$

Die frequenzabhängige Polarisation ist dann gegeben durch:

$$\boldsymbol{P}_0(\omega) = -eN\boldsymbol{x}_0(\omega).$$

Mit der Elementarladung e und Elektronendichte N.
Was ergibt sich für die Parameter ω_0 und ω_P? Welcher neue Term tritt in Folge der Dämpfung auf? Geben Sie die Maxwellgleichungen in Abhängigkeit der Felder $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{P}$ sowie die Bewegungsgleichung für $\boldsymbol{P}$ an.

(2 Punkte)

b) Dieses gekoppelte Differenzialgleichungssystem soll mit Hilfe ebener monochromatischer Wellen der Form:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \quad \boldsymbol{A} \in \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}\}.$$

zu algebraischen Gleichungen vereinfacht werden. (1 Punkt)

c) Für die weitere Rechnung wird benötigt, dass sich jeder Vektor $\boldsymbol{A}_0$ in eine Komponente $\boldsymbol{A}_0^{\parallel}$ parallel zu $\boldsymbol{k}$ und eine senkrechte, $\boldsymbol{A}_0^{\perp}$, zerlegen lässt:

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_0^{\parallel} + \boldsymbol{A}_0^{\perp},$$

$$\boldsymbol{A}_0^{\parallel} = (\boldsymbol{A}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{k}})\hat{\boldsymbol{k}}, \qquad \boldsymbol{A}_0^{\perp} = (\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{A}_0) \times \hat{\boldsymbol{k}}.$$

Mit $\hat{\boldsymbol{k}}$ auf Eins normierten Vektor in $\boldsymbol{k}$ Richtung. Zeigen Sie diese Relation der Vektoranalysis, und zerlegen Sie damit die algebraischen Gleichungen in longitudinale und transversale. Was ist der Vorteil dieser Zerlegung? (2 Punkte)

d) Aus der Kombination der longitudinalen Anteile erhält man eine Bestimmungsgleichung für ω. Wie lautet diese? Machen Sie eine Fallunterscheidung, indem Sie Annahmen über die Größe der Dämpfung, verglichen mit ω_0 und ω_P, machen. Welches zeitliche Verhalten ist dabei immer dasselbe? Wenn man die Bestimmungsgleichung für ω als Dispersionsrelation auffasst, erhält man eine etwas unerwartete Eigenschaft für diese Art der Anregung (Exziton aus der Festkörperphysik). (2 Punkte)

e) Die Dielektrizitätskonstante ε des polarisierbaren Dielektrikums kann man aus $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ bestimmen. Geben Sie diese als Funktion der Frequenz ω an (getrennt in Real- $\varepsilon'(\omega)$ und Imaginärteil $\varepsilon''(\omega)$). Stellen Sie diese Funktionen graphisch dar. Wie wirkt sich die Stärke der Dämpfung auf den Real- und Imaginärteil aus?

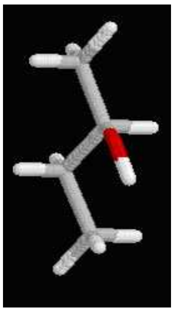
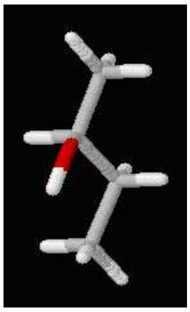
Die Dielektrizitätskonstante tritt auch bei der Bestimmung der Dispersionsrelation für die transversalen Anteile auf. Bestimmen Sie $\omega(k)$ und stellen Sie diese graphisch (ohne Dämpfung, d.h. $\gamma = 0$) dar. Zeichnen Sie auch das Ergebnis für den longitudinalen Fall ein. Wie lässt sich $\omega(k)$ graphisch mit Hilfe von $\varepsilon(k)$ bestimmen? (3 Punkte)

12. **(Zirkulare Doppelbrechung; 13 Punkte)**
Optisch aktive Materialien wie Quarz oder Zuckerlösungen werden durch die Materialgleichungen

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(\varepsilon\mathbf{E} - \gamma\nabla \times \mathbf{E})$$

mit den drei Parametern μ, ε und γ beschrieben (γ heißt Gyrationsparameter, 'Chirality parameter'). (Daneben gelten natürlich die Maxwellgleichungen.)

a) Leiten Sie den Ausdruck für die elektromagnetische Energiedichte ab. (2 Punkte)

$$u_{em} = \frac{1}{2\mu\mu_0}B^2 + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}E^2 - \frac{\varepsilon_0\gamma}{2}\mathbf{E}\cdot(\nabla \times E)$$

Hinweis: Beachten Sie, dass der Energiestrom Zusatzterme zu $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ aufweist.

b) Bei Spiegelung des Koordinatensystems am Ursprung, d.h. $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, ändert sich der Energiegehalt der elektromagnetischen Felder natürlich nicht. Welches Verhalten von γ unter Spiegelung müssen Sie also postulieren? (Größen mit diesem Verhalten heißen 'Pseudoskalare'). (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass jede ebene monochromatische Welle in einem optisch aktiven Medium eine Superposition zweier zirkular polarisierter ebener monochromatischer Wellen ist. Welche Dispersionsrelationen gelten für die beiden zirkular polarisierten Wellen?
Hinweis: Nehmen Sie feste Frequenzen ω an und lösen Sie die Dispersionsrelationen nach den Wellenvektoren $k = k_{\pm}(\omega)\hat{\mathbf{z}}$ auf. (3 Punkte)

d) Brechungsindizes $n_{\pm}$ werden durch den bekannten Zusammenhang $k_{\pm} = \frac{\omega}{c}n_{\pm}$ definiert. Wie lauten $n_{\pm}$ und $n_+ - n_-$? (1 Punkt)

e) Eine linear polarisierte ebene monochromatische Welle mit Frequenz ω propagiere in dem optisch aktiven Medium in $\hat{z}$-Richtung. Berechnen Sie die Drehung der Polarisationsrichtung nach dem Weg Δz. (2 Punkte)

f) In Dielektrika, die nicht optisch aktiv sind, kann eine Drehung der Polarisation durch Anlegen eines konstanten Magnetfeldes B_0 verursacht werden (Faraday-Effekt). Leiten Sie für das Lorentzsche Oszillatormodell von Aufgabe 11 den Zusammenhang

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(\varepsilon\mathbf{E} + \alpha\mathbf{B}_0 \times \dot{\mathbf{E}})$$

her. (Es gilt weiterhin $H = \frac{1}{\mu\mu_0}B$.) Was ist α?
Hinweis: In Verallgemeinerung des Lorentzschen Oszillatormodells berücksichtigen Sie, dass auf das harmonisch gebundene Elektron die Lorentzkraft $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ wirkt. Vernachlässigen Sie die Dämpfung und nehmen Sie $\omega \ll \omega_0$ an, so dass keine Dispersion auftritt. Der weitere Zusammenhang der Auslenkung $\mathbf{x}$ zur Polarisation $\mathbf{P}$ und zum elektrischen $\mathbf{D}$ Feld sei wie in Aufgabe 11. (2 Punkte)

g) Berechnen Sie in Analogie zu den Aufgabenteilen c), d) die Drehung der Polarisationsrichtung einer ebenen monochromatischen Welle, die in Richtung von $\mathbf{B}_0$ durch das Medium läuft. (2 Punkte)

h) Wie unterscheidet sich der Fall der magnetischen Drehung von dem der Drehung im optisch aktiven Medium? (1 Sonderpunkt)
Hinweis: Betrachten Sie Vorwärts- und Rückwärts-Durchlauf des Mediums.