UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2004/2005

Übungsblatt 13, Ausgabe 01.02.2005, abzugeben bis 08.02.2005
Besprechung in den Übungen in der 18. Semesterwoche (09.-11. Feb.)

53. **Eindimensionale Diffusionsgleichung; (6 Punkte)**

a) Diffundierende Teilchen seien zu einem Zeitpunkt ($t = 0$) auf ein enges Gebiet um $x = x_0$ konzentriert. Lösen Sie die Diffusionsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D(\frac{\partial}{\partial x})^2 n(x,t)$ für $t > 0$ mit der Anfangsbedingung $n(x, t = 0) = n_0 \delta(x - x_0)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Fouriertransformation

$$n(x,t) = \int \frac{dk}{(2\pi)} \, e^{ikx} \, \tilde{n}(k,t)$$

(2 Punkte)

b) Zeichnen Sie die Lösung für Stickstoffmoleküle N_2 bei Normalbedingungen ($l \approx 70nm, < v > \approx 476 \frac{m}{s}$) für einige Zeitpunkte zwischen $t = 10^{-6}s$ und $t = 1s$.

(2 Punkte)

c) Bestimmen Sie das mittlere Verschiebungsquadrat

$$< (x - x_0)^2 > = \int_{-\alpha}^{\infty} dx \; n(x,t)(x - x_0)^2$$

und zeichnen Sie es für die Parameter von Aufgabenteil (b). (2 Punkte)

54. **Stokes-Einstein-Diffusionskoeffizient; (5 Punkte)**
Der englische Botaniker *Robert Brown* beobachtete bereits 1827 die nach ihm benannte Bewegung suspendierter Teilchen in einem Lösungsmittel. Die korrekte Erklärung ihres Ursprungs in der thermischen Bewegung der Moleküle nahm *Desaulx* zwar 1877 vorweg. Eine exakte mathematische Ableitung gab jedoch erst *Albert Einstein* 1905 (Nobelpreis 1921) in einem seiner fünf berühmten Paper aus diesem Jahr. Fast zeitgleich fand *Marian v. Smoluchowski* unabhängig eine äquivalente Erklärung. Einstein griff auf die Vorarbeiten *Sir George Gabriel Stokes'* zurück, der sich 1850 mit dem Problem der Bestimmung von

Reibungszahlen befasst hatte. Von Einsteins Arbeiten inspiriert führten *Jean Baptiste Perrin* und *Theodor Svedberg* (beide Nobelpreis 1926) in den folgenden Jahren Experimente durch, die Einsteins Theorie bestätigten. Sie trugen nicht nur zu einer genaueren Bestimmung der Avogadro-Zahl bei, sondern lieferten gleichfalls den Beleg für die Richtigkeit der Kinetischen Theorie und damit für die tatsächliche Existenz von Atomen und Molekülen.
Sphärische Teilchen mit Radius R liegen mit sehr geringer Konzentration c in einer Flüssigkeit der Viskosität η vor. Auf die Teilchen wirke eine äußere Kraft $\mathbf{F}$, die eine Drift mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ hervorrufe.

a) Bestimmen Sie aus dem Gleichgewicht von Reibungskraft und äußerer Kraft die Driftgeschwindigkeit $\mathbf{v}$. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie den totalen Konzentrationsstrom, der sich aus dem Diffusions- und dem Driftanteil ergibt. (1 Punkt)

c) Wenn das System im Gleichgewicht sein soll, muss der totale Konzentrationsstrom verschwinden. Aus dieser Bedingung kann der Diffusionskoeffizient D ermittelt werden. Nehmen Sie hierzu an, dass die äußere Kraft die Gravitationskraft $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) = -mg\,\hat{\mathbf{z}}$ ist. Welche sinnvolle Annahme können Sie für das Konzentrationsfeld c machen? (2 Punkte)

d) Wie groß ist D für $1\mu m$ große Teilchen, die in Wasser gelöst sind? (1 Punkt)

55. **Wärmeleitung; (4 Punkte)**
Die Erdoberfläche sei beschrieben als ebene Trennfläche $z = 0$ eines Halbraumes. Die Oberflächentemperatur sei beschrieben durch eine Amplitude A und die Frequenz $\overline{\omega} : T(z = 0, t) = A \cos \overline{\omega} t$. Als repräsentativer Wert für die Temperaturleitzahl des Bodens sei gewählt $D = 4 \cdot 10^{-3}\text{cm}^2/\text{sec}$. Die Temperatur genüge der eindimensionalen Diffusionsgleichung der Wärmeleitung: $\partial_t T(z, t) = D\partial_z^2 T(z, t)$

a) Die Amplitude für die Temperaturschwankung im Laufe eines Jahres ist etwa $A = 10°C$. Berechnen Sie $T(z, t)$ und zeichnen Sie die Temperatur als Funktion der Tiefe z (in Meter) für Zeiten im Abstand Δt von einem Monat. Wie tief muss ein Weinkeller angelegt werden, wenn nur Temperaturschwankungen kleiner als $2°C$ erwünscht sind? Es sei das Temperaturminimum auf der Oberfläche im Februar erreicht; wann liegt im Weinkeller die tiefste Temperatur vor?
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz
$$T(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{T}(z, \omega)\ ;$$
wobei Sie für $z = 0$ die Darstellung des Dirac-δ benötigen, dass : $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ixy} = 2\pi\delta(y)$.
(3 Punkte)

b) Die tägliche Temperaturschwankung sei ebenfalls durch eine Amplitude von $A = 10°C$ beschrieben. Welche Dicke d muss die Bodenschicht haben, damit ebenfalls die Temperaturschwankung auf eine Amplitude $A(d) = 2°C$ reduziert wird. Um wieviele Stunden ist das Temperaturminimum in Tiefe d verschoben gegen das Minimum an der Oberfläche? (1 Punkt)

56. **Legendre-Transformation; (6 Punkte)**
Die Legendre-Transformation wird in der Physik an verschiedenen Stellen verwendet: der Übergang von Lagrangescher zu Hamiltonscher Mechanik geschieht durch

Legendre-Transformation bezüglich der Geschwindigkeitskoordinaten. Weiterhin wechselt man in der Thermodynamik von einer Fundamentalform zu einer anderen mittels einer Legendre-Transformation. In dieser Aufgabe sollen ein paar wesentliche Eigenschaften der Legendre-Transformation zusammengestellt werden.
Sei f eine strikt konvexe glatte Funktion, $f''(x) > 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x; p) = xp - f(x)$ für gegebenes p ein eindeutiges Maximum $x(p)$ hat.
Die Legendre-Transformation g ist nun der Wert von F an der Stelle des Maximums, also $g(p) = p \cdot x(p) - f(x(p))$. (1 Punkt)

b) Sei g die Legendre-Transformation von f. Zeigen Sie, dass dann $g(p/\alpha)$ die Legendre-Transformation von $f(\alpha x)$ ist, für $\alpha \neq 0$. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie die Youngsche Ungleichung $f(x) + g(p) \geq xp$. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass auch $g(p)$ strikt konvex ist.
Hinweis: Satz von der Umkehrfunktion auf f' anwenden. (1 Punkt)

e) Zeigen Sie die Involutivität der Legendre-Transformation, also dass die Legendre-Transformation von $g(p)$ wieder $f(x)$ ergibt. (1 Punkt)

f) Berechnen Sie die Legendre-Transformation der folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} 1.\ f(x) &= \frac{1}{2}x^2 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}, \\ 2.\ f(x) &= \frac{1}{\alpha}x^\alpha \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und } \alpha > 1, \text{ damit } f \text{ konvex ist.} \end{aligned}$$

Welche (bekannten?) Ungleichungen ergeben sich in diesen Beispielen aus der Youngschen Ungleichung? (1 Punkt)