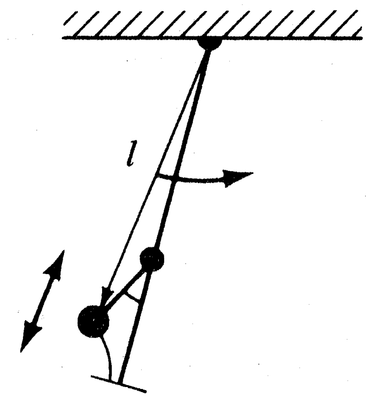
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2004/2005

Übungsblatt 12, Ausgabe 25.01.2005, abzugeben bis 31.01.2005
Besprechung in den Übungen in der 17. Semesterwoche (01.-03. Feb.)

49. **Schaukel; (6 Sonderpunkte)**



Ein Pendel kann durch periodische Veränderungen der Pendellänge zu Schwingungen angeregt werden. Diese sog. 'parametrische Resonanz' nutzt ein Kind auf der Schaukel, welches durch Beinbewegung die Schaukellänge abwechselnd verkürzt und verlängert. Dasselbe Prinzip liegt vielen Anwendungen, z.B. in der Elektrotechnik, zu Grunde.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für ein Pendel im Schwerefeld in der Näherung kleiner Auslenkungen auf. Nun soll angenommen werden, dass die Pendellänge zeitlich etwas variiere: $l(t) = l(1 + \tilde{\varepsilon}\ \cos \Omega t)$.

b) Welches Verhältnis hat die Anregungsfrequenz Ω zur Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators im Beispiel der Schaukel?

c) Zeigen Sie, dass für das Beispiel der Schaukel die Bewegungsgleichung auf folgende Form (eine 'Mathieusche Gleichung') gebracht werden kann:

$$\ddot{x} + (\frac{1}{4} + \varepsilon \cos t)x = 0$$

d) Das Multiskalenverfahren zur genäherten Lösung von Gl. (1) für $\varepsilon \to 0$ führt auf folgenden Lösungsansatz

$$x(t) = x_0(\tau_0, \tau_1) + \varepsilon x_1(\tau_0, \tau_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

wobei die Zeitskalen $\tau_0 = t$ (schnell) und $\tau_1 = \varepsilon t$ (langsam) auftreten.
Zeigen Sie, dass

$$x_0 = A(\tau_1)\cos\frac{\tau_0}{2} + B(\tau_1)\sin\frac{\tau_0}{2}$$

lautet.

e) Welche Differentialgleichungen ergeben sich bei der Bestimmung von x_1 für die beiden Funktionen $A(\tau_1)$ und $B(\tau_1)$ aus der sog. Poincareschen Säkularbedingung, dass x_1 nicht resonant angetrieben werde? Für welche ε treten exponentiell anwachsende Lösungen $A(\tau_1)$ und $B(\tau_1)$ auf?

f) Parametrische Resonanz tritt auch bei anderen Verhältnissen von Eigenfrequenz des Pendels zu Anregungsfrequenz auf. Vermuten Sie für welche, und welche Stärken die Resonanzen aufweisen könnten?

50. **Adiabatische Invariante; (6 Sonderpunkte)**
Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator, dessen Eigenfrequenz ω sich adiabatisch ändert. Das bedeutet, dass die Rate dieser Änderung klein gegenüber ω ist. Zur Veranschaulichung können Sie an ein mathematisches Pendel denken, das kleine Schwingungen ausführt und dessen Faden langsam verkürzt wird. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + \omega^2(\varepsilon t)x = 0,$$

wobei ε eine kleine Größe ist. Zeigen Sie durch explizite Lösung der Bewegungsgleichung für $\varepsilon \ll 1$, dass die Wirkungsvariable

$$J := \oint dxp$$

für kleine ε zeitlich konstant ist. $p = m\dot{x}$ ist der kanonisch konjugierte Impuls zu x. J bleibt also bei dieser adiabatischen Änderung unverändert (adiabatische Invariante).
Hinweis:Führen Sie zunächst die neue Variable $\tau = \varepsilon t$ ein. Wir schreiben Ableitungen nach τ als $x' := dx/d\tau = \dot{x}/\varepsilon$. Schreiben Sie die Differentialgleichung für x'' hin und machen Sie den Ansatz

$$x(r) = A\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau d\tau' y(\tau')\right).$$

(Für konstantes y erhält man einfach den üblichen Exponentialansatz für den harmonischen Oszillator mit konstanter Eigenfrequenz.) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung für y lautet

$$\varepsilon y' + y^2 + \omega^2(\tau) = 0.$$

Als nächstes entwickeln Sie in dieser Gleichung

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \ldots$$

Lösen Sie die Gleichungen für y_0 und y_1. Beachten Sie dabei, dass ω von der Zeit abhängt. Zeigen Sie, dass die Lösung für x bis zu dieser Ordnung lautet

$$x = \frac{A}{\sqrt{\omega}}e^{\pm i\omega t}.$$

Die reelle, physikalische Lösung läßt sich dann offenbar schreiben als

$$x = \frac{B}{\sqrt{\omega}} sin(\omega t + \phi).$$

Bestimmen Sie damit schließlich die Wirkungsvariable

$$J = \oint dxp = \int_0^T dt\dot{x}p.$$

Bemerkung: Diese Methode entspricht formal der WKB-Näherung in der Quantenmechanik. Dort ist die eindimensionale Schrödingergleichung von der Form $\psi'' + [V(x) - E]\psi = 0$ und man betrachtet $V(x) - E$ als schwach vom Ort x abhängig, genau wie hier ω^2 schwach von t abhängig sein sollte.

51. **Heissluftballon; (4 Punkte)**
Ein Heissluftballon hat eine Masse $M = 200$kg (ohne die eingeschlossene Luft) und ein Volumen $V = 2200\text{m}^3$. Der Luftdruck in Inneren und ausserhalb des Ballons betrage Normaldruck (1 atm) bei einer Aussentemperatur von $T = 17°\text{C}$.

   a) Wieviel mol Luft befinden sich bei dieser Temperatur im Ballon, wenn die Luft als ideales Gas angenommen wird? (2 Punkte)

   b) Zum Aufsteigen wird die Luft im Inneren des Ballons mit einem Brenner erhitzt. Welcher Temperaturunterschied zwischen dem Inneren des Ballons und ausserhalb muss erreicht werden, damit der Ballon steigt? Verwenden Sie hierzu die molare Masse von Luft von 28.8 g/mol und vernachlässigen Sie das Volumen der Ballonhaut.

   (2 Punkte)

52. **Planetenatmosphären; (6 Punkte)**

   a) Berechnen Sie die Höhe H, bei der der Druck p auf p_0/e abgefallen ist für die Atmosphären der Erde sowie von Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun. Machen Sie dabei die Annahme, dass die Atmosphären isotherm sind. Verwenden Sie für die Planetenmassen M, die Planetenradien R sowie die mittleren Temperaturen T folgende Werte:

	Erde	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
R [km]	6378	71'492	60'268	25'559	24'764
M [10^{24}kg]	5.97	1898.8	568.5	86.625	102.78
T	288	167	128	79	70

Hinweis: Die Atmosphären von Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun bestehen zu ca. 85 Mol-% aus molekularem Wasserstoff und zu 15 Mol-% aus Helium.