UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

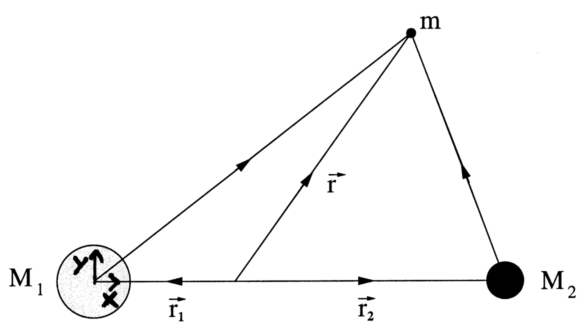
Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2004/2005

Übungsblatt 11, Ausgabe 18.01.2005, abzugeben bis 25.01.2005
Besprechung in den Übungen in der 16. Semesterwoche (25.-27. Jan.)

45. **'Swing-by'-Verfahren, (8 Punkte, 2 Sonderpunkte)**
Raumsonden können durch Vorbeiflug an Planeten Schwung gewinnen und so größere Entfernungen zur Sonne erreichen als alleine durch Verwendung ihrer Treibstoffe möglich wäre. Z.B. hat die 1977 gestartete Sonde Voyager 2 nach 'Swing-by' Manövern an Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun das Sonnensystem verlassen. Als Modell für einen 'Swing-by' am Jupiter soll das Dreikörperproblem betrachtet werden, das durch die Lagrangedichte gegeben ist:

$$L = \underbrace{\frac{M_1}{2}v_1^2 + \frac{M_2}{2}v_2^2 + \frac{\gamma M_1 M_2}{\mid \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \mid}}_{L^0} + m_3 \left[\underbrace{\frac{v_3^2}{2} + \frac{\gamma M_1}{\mid \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \mid} + \frac{\gamma M_2}{\mid \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \mid}}_{L^1} \right]$$

Index 1 bezeichnet Größen der Sonne, Index 2 die des Jupiters, und 3 die der Raumsonde. γ ist die Gravitationskonstante. (Zur Abkürzung werde $m = m_3$ und $\mathbf{r} = \mathbf{r}_3$ gesetzt.) Dieses Problem ist im allgemeinen nicht lösbar, weswegen die Näherung gemacht werden soll, dass $m_3 \ll M_2, M_1$ die Masse der Raumsonde so klein ist, dass sie die Bewegung von Jupiter und Sonne nicht beeinflusst.



a) Lösen Sie das Keplerproblem gegeben durch L^0 für die beiden größeren Massen M_1 und M_2 (wobei $M_2 \ll M_1$ gilt) unter der Annahme, dass die Keplerellipse zu einem Kreis entartet.
Hinweis: Führen Sie Schwerpunkts- und Relativkoordinaten ein und verwenden Sie als Parameter der Lösung den mittleren Radius $R = 7.78 \cdot 10^8 km$ und die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/690d$ der Jupiterbahn. (2 Punkte)

b) Die Bewegung der leichten Masse m gegeben durch L_1 werde im mit dem Jupiter rotierenden Bezugssystem beschrieben, wobei die x-Achse von der Sonne zum Jupiter zeige und die y-Achse senkrecht dazu stehe (siehe Skizze). Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten von m im rotierenden Bezugssystem lauten

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y} - \frac{\partial\bar{U}}{\partial x} \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} - \frac{\partial\bar{U}}{\partial y} \\ \ddot{z} &= -\frac{\partial\bar{U}}{\partial z} \end{aligned}$$

wobei das effektive Potential $\bar{U}$ gegeben ist durch

$$\bar{U} = -\left[\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{\gamma M_1}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}_1 \mid} + \frac{\gamma M_2}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}_2 \mid}\right]$$

(3 Punkte)

c) Die Lagrangedichte L_1 hat in den Koordinaten (x, y, z) ausgedrückt eine wichtige Eigenschaft. Welche Erhaltungsgröße können Sie folgern? Sie heißt Jacobi Integral J.

(1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass das Jacobi-Integral ausgedrückt durch die Koordinaten $\mathbf{r}_3$ der Raumsonde im nicht rotierendem Bezugssystem lautet

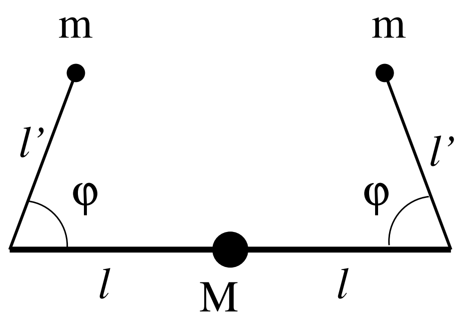
$$J = \omega(x_3\dot{y}_3 - y_3\dot{x}_3) - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_3^2 + \frac{\gamma M_1}{\mid \mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1 \mid} + \frac{\gamma M_2}{\mid \mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2 \mid}$$

(2 Punkte)

e) Erklären Sie, wie die Raumsonde beim 'Swing-by' Manöver Energie gewinnen kann.

(2 Sonderpunkte)

46. **Symmetrische planare Skater; (6 Punkte)**
Drei Massen $m_1 = m_2 = m$ und $m_3 = M$, die sich in einer Ebene frei bewegen können, seien durch (masselose) Stangen der Länge $2l$ und l' wie in der Skizze dargestellt verbunden. Die Winkel zwischen den Stangen φ_1 und φ_2 seien zur Vereinfachung als gleich angenommen $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$ und seien durch z.B. Motoren beliebig veränderbar.

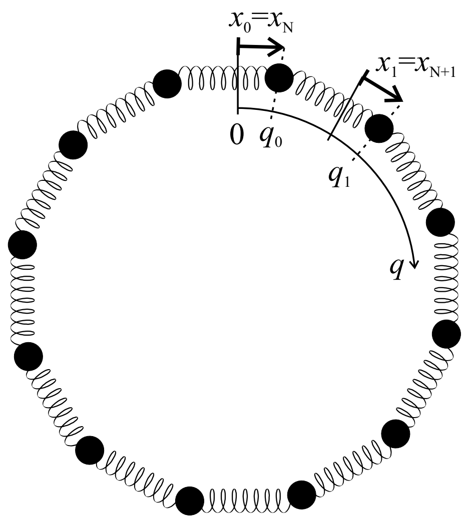


a) Formulieren Sie die Lagrangedichte L, die gleich der kinetischen Energie sei $L = T$ (d.h. kein Potential wirke) und die homogenen Zwangsbedingungen für dieses isotrope und translationsinvariante System. (2 Punkte)

b) Begründen Sie mit dem Theorem von Noether, dass der Gesamtimpuls P und der Gesamtdrehimpuls L_z Erhaltungsgrößen der Bewegung sind. Zur Vereinfachung werde angenommen, dass beide zum Zeitpunkt t_0 verschwinden. Folgern Sie, dass dann auch der Schwerpunktsvektor $\mathbf{R}(t)$ eine Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)
Hinweis: Es ist ausreichend zu diskutieren, dass die erforderlichen Symmetrietransformationen die Lagrangedichte L und die Zwangsbedingungen invariant lassen.

c) Bestimmen Sie den Gesamtdrehimpuls L_z explizit und daraus die Drehung des Körpers in der Zeit $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$ wenn der Winkel $\varphi(t)$ variiert wie $\varphi(t) = \omega t$. (2 Punkte)

47. **Schwingungen in kreisförmiger Kette; (6 Punkte)**



N identische Teilchen der Masse m werden mit N identischen Federn (die nicht notwendigerweise ein lineares Kraftgesetz aufweisen) zu einem Adventskranz verbunden. Die Koordinaten längs des Rings seien q_j ($j = 0, \ldots, N-1$).
a) Setzen Sie eine potentielle Energie $u(q_{j+1} - q_j)$ zwischen jedem Paar von benachbarten Teilchen an (Formel geeignet modifiziert für „Ringschluss"), wobei die Funktion u ein Minimum $u(a) = u_0$ besitzt. Welche Ruhelage $q_j^{(0)}$ der N Teilchen wird sich einstellen?

Den so gefundenen Ringumfang halten wir nun fest und erlauben den Teilchen nur noch eindimensionale Bewegung entlang des Kreises (s. Skizze), die wir durch die Auslenkungen $\mathbf{x}$ aus der Ruhelage $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 - q_0^{(0)} \\ \vdots \\ q_{N-1} - q_{N-1}^{(0)} \end{pmatrix}$ beschreiben. Die *periodischen Randbedingungen* erlauben uns dabei, $x_{j+N} \equiv x_j$ zu identifizieren. Zeigen Sie durch Taylorentwicklung der potentiellen Energie, dass sich die Lagrangefunktion ergibt zu

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \mathcal{A} \dot{\mathbf{x}} - \frac{D}{2} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathcal{B} \mathbf{x}. \tag{1}$$

Welche Form haben die Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$? (1 Punkt)

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her. Schreiben Sie sie in Matrixschreibweise und komponentenweise. (1 Punkt)

c) Um die Bewegungsgleichungen zu entkoppeln, ist bei einem solchen Problem mit periodischen Randbedingungen die *diskrete Fouriertransformation* geeignet. Hierbei wird das Muster der Auslenkungen als die folgende Superposition angesetzt:

$$x_j(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_n(t) \exp(ik_n ja) \tag{2}$$

Welche Bedingung müssen die Wellenzahlen k_n erfüllen und warum durchläuft n gerade den Bereich $0 \ldots N-1$? Welchen Bereich durchläuft k_n? Weisen Sie nach, dass sich die Fourierkoeffizienten $\tilde{x}_n$ bestimmen lassen durch

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \exp(-ik_n ja) \tag{3}$$

(2 Punkte)

d) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die sogenannten *Normalkoordinaten* $\tilde{x}_n(t)$ her und führen Sie in geeigneter Weise Kreisfrequenzen ω_n ein. Skizzieren Sie die Abhängigkeit $\omega_n(k_n)$, die man *Dispersionsrelation* nennt. (2 Punkte)

48. **Poissonklammern und Erhaltungssätze; (7 Punkte)**
Die Poissonklammer zweier Funktionen $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ und $B(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ im Phasenraum der generalisierten Koordinaten q_i und Impulse p_i $(i = 1, \ldots, f)$ wurde in der Vorlesung definiert durch

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, dass die Poissonklammer eine schiefsymmetrische bilineare Form ist:
$\{A, B\} = -\{B, A\}$ und für zwei Konstanten λ_1 und λ_2 gilt
$\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B\} = \lambda_1\{A_1, B\} + \lambda_2\{A_2, B\}$. (1 Punkt)
b) Zeigen Sie, dass eine Funktion $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ die mit der Zeit variiert, weil $\mathbf{q}(t)$ und $\mathbf{p}(t)$ Lösungen zur autonomen Hamiltonschen Funktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sind, der Gleichung genügt

$$\frac{d}{dt} A(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \{A, H\} \tag{5}$$

(1 Punkt)
c) Wenden Sie diese Formel auf $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ und H selber an. Wann ist eine Funktion A zeitlich konstant entlang des Flusses im Phasenraum gegeben durch $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$? (1 Punkt)
d) Eine Verallgemeinerung der Noetherschen Theoreme erhält man durch infinitesimale $(s \to 0)$ Verschiebungen des Systems generiert durch eine Funktion $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, genannt "Erzeugende",

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + s\frac{\partial G}{\partial p_i} \\ P_i &= p_i - s\frac{\partial G}{\partial q_i} \\ \text{für } s \to 0 \quad &, \quad i = 1, \ldots, f \end{aligned}$$

Welche Bedingung muss eine Funktion $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ erfüllen, damit sie in linearer Ordnung in s invariant bleibt unter dieser Verschiebung?
Folgern Sie, dass die Konstanten der Bewegung die Erzeugenden infinitesimaler Verschiebungen sind, die die Hamiltonsche Funktion invariant lassen. (1 Punkt)

e) Am Beispiel von zwei Massepunkten m_1 und m_2 mit potentieller Energie $V(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2})$ soll die Bedingung gefunden werden, dass der Gesamtimpuls und der Gesamtdrehimpuls erhalten sind. (2 Punkte)

f) Beweisen Sie, dass der n-dimensionale entartete harmonische Oszillator, gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{m\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i^2$$

die Erhaltungsgrößen

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}(\frac{p_i p_j}{m} + m\omega^2 q_i q_j)$$

besitzt. (1 Punkt)