

UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)

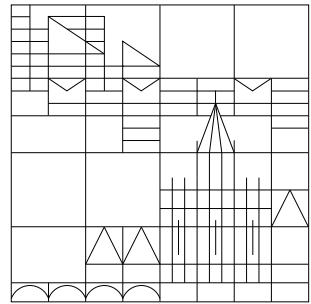
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151

E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de

Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)

Raum P 907, Tel. (07531)88-4678

E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

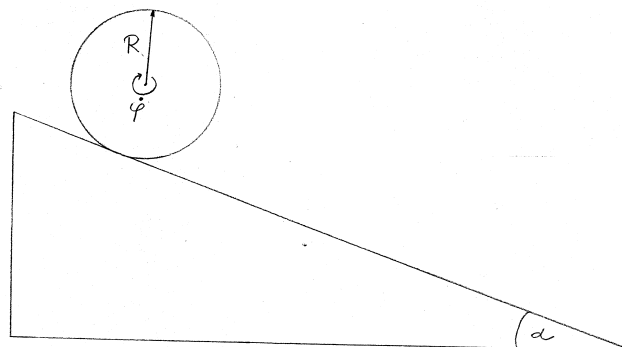


**Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2004/2005**

Übungsblatt 10, Ausgabe 11.01.2005, abzugeben bis 18.01.2005
Besprechung in den Übungen in der 15. Semesterwoche (19.-21. Jan.)

41. Mechanik Spielereien; (6 Punkte)

(A) Rollendes Fass



Ein leeres Fass rolle ohne zu gleiten eine Rampe hinunter.

- Als Zwangsbedingung tritt die sogenannte Rollbedingung auf. Auf den ersten Blick ist diese nicht holonom. Zeigen Sie, dass diese auf eine holonome Zwangsbedingung zurückgeführt werden kann. (1 Punkt)
- Stellen Sie die Lagrangegleichungen auf und lösen Sie sie. (1 Punkt)
- Vergleichen Sie die Geschwindigkeit des rollenden Fasses mit der Geschwindigkeit beim freien Fall. (1 Punkt)

(B) Jojo

Gegeben sei ein Jojo mit Trägheitsmoment I und Achsenradius r (siehe Abb. 1). Näherungsweise sei die Schnur verschwindend dünn, masselos und beliebig lang, so dass sie stets senkrecht bleibt. Sie ist an einem Punkt auf der Achse befestigt.

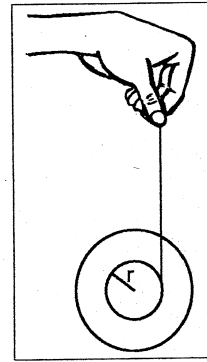
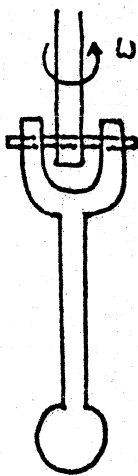


Abbildung 1:

- a) Stellen Sie die Lagrangedichte L auf und eliminieren Sie die Zwangsbedingungen für den Fall der teilweise aufgewickelten Schnur, und dass der Befestigungspunkt ruht. (2 Punkte)
- b) Welche Sinkbewegung führt das Jojo aus? (1 Punkt)

42. Rotierendes Schwerependel; (5 Punkte)



Die horizontale Achse der Aufhängung eines ebenen Pendels rotiere mit Winkelgeschwindigkeit ω um eine vertikale Achse.

- a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf für Schwingungen des Pendels um seine horizontale Aufhängungsachse im Schwerfeld. (2 Punkte)
- b) Diskutieren Sie die Gleichgewichtslagen als Funktion von ω . (1 Punkt)
- c) Diskutieren Sie die kleinen Schwingungen des Pendels um seine Gleichgewichtslage als Funktion von ω . (2 Punkte)

43. Foucaultsches Pendel; (11 Punkte)

Ein Pendel in einem Labor in Konstanz dreht seine Schwingungsrichtung langsam aufgrund der Rotation der Erde. Dieser Effekt soll durch Betrachtung der Coriolis-Kraft auf das Pendel bestimmt werden.

- a) Die Position des Pendels auf der Erdkugel laute

$$\mathbf{R}(t) = R \begin{pmatrix} \cos \Omega t \sin \theta \\ \sin \Omega t \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit der Nord-Süd-Achse der Erde $\parallel \hat{\mathbf{z}}$. Welche Werte nehmen R , Ω , θ in Konstanz an? Wie groß ist die Zentrifugalkraft im Vergleich zur Erdanziehung? (1 Punkt)

- b) Betrachten Sie die kinetische Energie T des Pendels im unbewegten Inertialsystem, dessen Ursprung mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt. Zeigen Sie, dass mit den (vertrauten) Koordinaten des Pendels im mit der Erde rotierenden Laborsystem $(h(t), x(t), y(t))$, wobei h die vertikale Höhe, und x, y die Pendelauslenkung in der horizontalen Ebene bezeichnen, die kinetische Energie T (im unbewegten System!) lautet:

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{h}^2 + 2\Omega \{ \dot{x} ((R+h) \sin \theta - y \cos \theta) - \dot{h} (x \sin \theta) + \dot{y} (x \cos \theta) \} + \mathcal{O}(\Omega^2)],$$

wobei $\hat{\mathbf{x}}$ in Richtung Osten und $\hat{\mathbf{y}}$ in Richtung Norden zeigt und der vernachlässigte Beitrag $\mathcal{O}(\Omega^2)$ mit der Zentrifugalkraft zusammenhängt. (3 Punkte)

Hinweis: Die Geschwindigkeit in unbewegtem System setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit im bewegten System und der durch die Erddrehung bedingten Rotationsgeschwindigkeit.

- c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für *kleine* horizontale Auslenkungen $\delta x(t) = x(t) - x(0)$, $\delta y(t) = y(t) - y(0)$ des Pendels im Schwerfeld $V_{\text{grav}} = mgh$. (3 Punkte)

Hinweis: Benutzen Sie die Zwangsbedingung, dass die Pendellänge konstant bleibt und eliminieren Sie die Koordinate h aus der Lagrange-Funktion. Benutzen Sie ausserdem die Tatsache, dass bei kleinen Auslenkungen δx , δy , für die vertikale Auslenkung $h(t) - h(0) \ll \delta x$, δy gilt. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned}\delta \ddot{x} + \omega^2 \delta x &= 2\tilde{\Omega} \delta \dot{y} \\ \delta \ddot{y} + \omega^2 \delta y &= -2\tilde{\Omega} \delta \dot{x}\end{aligned}$$

Was sind w und $\tilde{\Omega}$?

- d) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen mit der Hilfsvariablen $\zeta(t) = \delta x + i\delta y$ und bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Schwingungsebene. Nehmen Sie dabei an, dass $\omega \gg \Omega$, $\tilde{\Omega}$ ist. Skizzieren Sie δx , δy als Funktionen von t , wenn das Pendel in y -Richtung startete ($\delta x = \delta \dot{x} = 0$ und $\delta y = y_0$, $\delta \dot{y} = 0$ für $t = 0$) (3 Punkte)
- e) Um wieviel Grad pro Stunde dreht sich ein Pendel mit der Länge $L = 10$ m in Konstanz? (1 Punkt)

44. Teilchenbahnen in gekreuzten elektromagnetischen Feldern; (19 Punkte)

Gesucht wird die Bahnkurve eines Teilchens mit Ladung q und Masse m in homogenen statischen elektrischen \mathbf{E} und magnetischen \mathbf{B} Feldern, welche senkrecht aufeinander stehen, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$ und $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Die Lagrangefunktion für das Teilchen lautet

$$L = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - q \phi(\mathbf{r}) + q \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

mit den elektromagnetischen Potentialen, aus denen die statischen Felder folgen durch

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für das Teilchen lautet

$$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- a) Zeigen Sie, dass die Wahl $\phi = -E y$ und $\mathbf{A} = -B y \hat{\mathbf{x}}$ zu den gewünschten elektromagnetischen Feldern führt. Wie lautet dann die Lagrangefunktion? (2 Punkte)

Hinweis: Alle folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Die angegebene Reihenfolge wird empfohlen.

b) Zeigen Sie mit dem Euler-Lagrange Formalismus, dass die Lagrangefunktion von Teilaufgabe a) auf dieselben Bewegungsgleichungen führt wie die Newtonschen für diesen Spezialfall. (3 Punkte)

c) Welche zyklischen Variablen liegen vor und welche zeitlich erhaltenen Größen folgen daraus? (5 Punkte)

d) Bestimmen Sie mit dem Noetherschen Theorem (NT) ein *weiteres* Integral der Bewegung (d.h. eine weitere Erhaltungsgröße).

Hinweis: Das NT liefert für jede Symmetrie der Lagrangefunktion, d.h.

$$\tilde{L}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', \alpha) = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{r}, t, \alpha)$$

eine Erhaltungsgröße

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}$$

(3 Punkte)

e) Berechnen Sie die Bahnkurven $\mathbf{r}(t)$ für ein Teilchen, das zum Zeitnullpunkt am Ursprung ist und in $\hat{\mathbf{x}}$ -Richtung fliegt, d.h. $\mathbf{r}(0) = 0$ und $\mathbf{v}(0) = v_0 \hat{\mathbf{x}}$.

Hinweis: Die komplexe Hilfsvariable $\zeta(t) = x(t) + i y(t)$ kann zur Lösung der Differentialgleichung nützlich sein. (6 Punkte)