

UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)

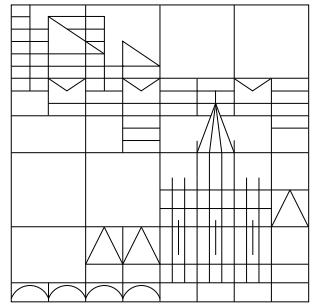
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151

E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de

Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)

Raum P 907, Tel. (07531)88-4678

E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de



Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs Wintersemester 2004/2005

Übungsblatt 0, Ausgabe 26. 10. 2004

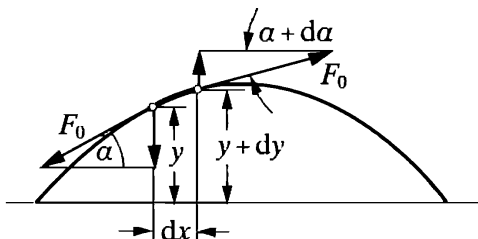
Besprechung in den Übungen vom 03. bis 05. 11. 2004

Aufgabe 1 (Seilwellen; 5 Punkte)

Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung $y(x, t)$ eines Seilstücks mit der (infinitesimalen) Länge ds , der Querschnittsfläche A , der Massendichte ρ und dem Gewicht $dm = \rho A ds$, welches in x -Richtung gespannt wird, soll gefunden werden.

Hinweis: Verwenden Sie, dass an ein mit der Spannung σ gespanntes Seil an jeden Punkt eine Kraft $F_0 = \sigma A$ angreift, die entlang der Tangente an diesem Punkt gerichtet ist.

Durchgehend soll angenommen werden, dass die Auslenkung y klein und glatt ist, so dass z.B. die Länge ds genähert werden kann durch $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx \doteq dx$



- a) Zeigen Sie, dass die resultierende Kraft $d\mathbf{F}$ auf das Massenelement mit der Auslenkung $y(x, t)$ betragsmäßig lautet

$$dF \doteq F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

und (ungefähr) senkrecht zum Seil gerichtet ist.

Hinweis: siehe Bild

(2 Punkte)

- b) Leiten Sie mit den Newtonschen Gleichungen die Wellengleichung für die Auslenkung ab:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

Was ist c ?

(1 Punkt)

- c) Zwei Seilstücke unterschiedlicher Massedichten ρ_1 und ρ_2 seien bei $x = a$ verknüpft. Begründen Sie, dass am Ort $x = a$ die Auslenkung y stetig und stetig differenzierbar ist, $y(x = a-) = y(x = a+)$ und $\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow a-} = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow a+}$ (2 Punkte)

Aufgabe 2 (Superposition von Wellen; 6 Punkte)

Vier elektromagnetische Wellen sind gegeben durch

$$\text{Welle 1 : } \mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 E_1^0 e^{-i(\omega t - kz)} \quad ; \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_2 \frac{E_1^0}{c_0} e^{-i(\omega t - kz)}$$

$$\text{Welle 2 : } \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 E_2^0 e^{-i(\omega t - kz + \alpha)} \quad ; \quad \mathbf{B}_2 = -\mathbf{e}_1 \frac{E_2^0}{c_0} e^{-i(\omega t - kz + \alpha)}$$

$$\text{Welle 3 : } \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_1 E_3^0 e^{-i(\omega t - kz + \alpha)} \quad ; \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{e}_2 \frac{E_3^0}{c_0} e^{-i(\omega t - kz + \alpha)}$$

$$\text{Welle 4 : } \mathbf{E}_4 = \mathbf{e}_1 E_4^0 e^{-i(\omega t + kz)} \quad ; \quad \mathbf{B}_4 = -\mathbf{e}_2 \frac{E_4^0}{c_0} e^{-i(\omega t + kz)}$$

- a) Man berechne \mathbf{S} und $\langle \mathbf{S} \rangle$ für die Superposition der Wellen 1 und 2. Man zeige, dass diese Größen gerade gleich den Summen der entsprechenden Größen für die Einzelwellen sind. (2 Punkte)
- b) Man berechne \mathbf{S} und $\langle \mathbf{S} \rangle$ für die Superposition der Wellen 1 und 3. Man vergleiche mit den Resultaten von a) und erkläre die Differenz. (2 Punkte)
- c) Man berechne \mathbf{S} für die Superposition der Wellen 1 und 4 und zeige, dass die Energie oszilliert; sie ist einmal rein elektrisch, dann wieder rein magnetisch. Man zeige, dass $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$. (2 Punkte)

Aufgabe 3 (Fourier Reihe; 7 Punkte)

Eine reelle Funktion $f(x)$, die quadrat integrabel im Bereich $-l \leq x \leq l$ ist, d.h.

$\int_{-l}^l dx |f(x)|^2 < \infty$, soll durch eine Summe

$$\tilde{f}_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n \varphi_n(x)$$

angenähert werden, wobei die Funktionen φ_n orthonormiert sind, d.h.

$$\int_{-l}^l dx \varphi_n^*(x) \varphi_m(x) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{ikx}$$

mit $k = \frac{\pi}{l}n$ und $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ orthonormiert sind. (1 Punkt)

- b) Als Maß für den Fehler der Näherung soll verwendet werden

$$\delta_N^2 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dx |f(x) - \tilde{f}_N(x)|^2$$

Zeigen Sie, dass δ_N^2 als Funktion der Entwicklungskoeffizienten c_n minimal wird, wenn diese erfüllen:

$$c_n = \int_{-l}^l dx \varphi_n^*(x) f(x)$$

(2 Punkte)

c) Verwenden Sie, dass $f(x)$ reell ist, um die Summe $\tilde{f}_N(x)$ umzuschreiben zu:

$$\tilde{f}_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=N} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \right]$$

Wie lauten die a_n und b_n ? Was kann gefolgert werden, wenn $f(x)$ symmetrisch (d.h. $f(-x) = f(x)$) oder antisymmetrisch (d.h. $f(-x) = -f(x)$) ist? (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Fourierreihe $\tilde{f}(x)$, die sich für $N \rightarrow \infty$ ergibt durch $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_\infty(x)$, für die Funktionen:

$$f_1(x) = \begin{cases} a \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 < x \leq l \\ f_1(-x) & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

und

$$f_2(x) = \begin{cases} a \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 < x \leq l \\ -f_2(-x) & -l \leq x < 0 \end{cases},$$

und vergleichen Sie das Verhalten der Fourierkoeffizienten für grosse n . (2 Punkte)

Aufgabe 4 (Nabla-Kalkül; 5 Punkte)

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ seien Vektorfelder, $\phi(\mathbf{r})$ ein Skalarfeld und $f(r)$ eine skalare Funktion, die nur von $r = |\mathbf{r}|$ abhängt. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} \times \nabla) \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \phi (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \nabla \phi.$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla^2 f(r) = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right)f(r)$$