

# Skript

## Vorlesung zu Physik III - Integrierter Kurs

Fachbereich Physik an der Universität Konstanz  
gelesen von PROF. DR. GEORG MARET und PROF. DR. MATTHIAS FUCHS  
bearbeitet von MAXIMILIAN THALLER

Stand: 28. Februar 2011

---

---

Dieses Skript ist eine Mitschrift der Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs an der Universität Konstanz (Wintersemester 2010/2011) gelesen von Prof. G. Maret (Experimentalphysik) und Prof. M. Fuchs (theoretische Physik).



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Optik</b>	<b>7</b>
1.1 Wiederholung der Elektrodynamik	7
1.1.1 Die Maxwell-Gleichungen	7
1.1.2 Vakuum-Polarisierbarkeit und Vakuum-Permeabilität	10
1.1.3 Superposition und Komplexifizierung	11
1.2 Elektromagnetische Wellengleichung	12
1.2.1 Lichtgeschwindigkeit $c$	12
1.2.2 Exkurs zur skalaren Wellengleichung	13
1.2.3 Transversalität elektromagnetischer Wellen	16
1.2.4 Energiedichte elektromagnetischer Felder	17
1.2.5 Energiedichte und Energiestromdichte ebener elektromagnetischer Wellen	18
1.2.6 Polarisierung ebener elektromagnetischer Wellen	20
1.3 Charakteristische Eigenschaften von elektromagnetischer Strahlung	21
1.3.1 Der oszillierende Dipol als Quelle elektromagnetischer Strahlung	21
1.3.2 Licht besteht aus Photonen	22
1.4 Brechungsindex und Dispersion	22
1.4.1 Maxwell-Gleichungen und elektromagnetische Wellengleichung in dielektrischer Materie	22
1.4.2 Makroskopische Definition des Brechungsindex $n$	22
1.4.3 Lorentz-Modell zur Dispersion $n(\lambda)$	23
1.4.4 Absorption und Imaginärteil von $n$	25
1.4.5 Brechungsindex für Materie, $n > 1$ (nicht $n \approx 1$ )	25
1.5 Lichtausbreitung in optisch anisotropen Medien	28
1.5.1 Überblick	28
1.5.2 Brechungsindexellipsoid	29
1.5.3 Lichtausbreitung in uniaxialen Kristallen $n_1 = n_2 \neq n_3$	31
1.5.4 Anwendungen der Doppelbrechung	33
1.6 Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen	38
1.6.1 Wiederholung: Feldverhalten an Grenzflächen	38
1.6.2 Energiefluss durch eine Grenzfläche	40
1.6.3 Brechungs- und Reflexionsgesetze	42
1.7 Geometrische Optik	51
1.7.1 Fermat'sches Prinzip	51
1.7.2 Optische Abbildungen	53
1.7.3 Durchgang von Strahlen durch Dielektrika (Prismen, Linsen)	58

1.8	Interferenz . . . . .	69
1.8.1	Interferenz von zwei Punktquellen . . . . .	69
1.8.2	Michelson Interferometer . . . . .	72
1.8.3	Vielstrahl-Interferenz . . . . .	73
1.8.4	Fabry-Pérot-Interferometer . . . . .	77
1.8.5	Kohärenz . . . . .	78
1.9	Beugung . . . . .	82
1.9.1	Einzelspalt . . . . .	82
1.9.2	Beugung an $N$ Spalten (Gitter) . . . . .	85
1.10	Mathematischer Einschub: Fouriertransformationen . . . . .	90
1.10.1	Definition der Fouriertransformation (FT) . . . . .	90
1.10.2	Differentiation und Multiplikation . . . . .	92
1.10.3	Faltungstheorem . . . . .	93
1.10.4	Umkehrung der Fourier-Transformation und Parseval-Gleichung . . . . .	94
1.11	Mathematischer Einschub: Retardierte Green'sche Funktion der Wellengleichung . . . . .	97
1.11.1	Motivation . . . . .	97
1.11.2	Inhomogene Wellengleichung . . . . .	97
1.11.3	Retardierte Green'sche Funktion . . . . .	98
<b>2</b>	<b>Thermische Physik</b>	<b>101</b>
2.1	Einleitung . . . . .	101
2.2	Temperatur . . . . .	101
2.3	Das ideale Gas . . . . .	102
2.3.1	Barometrische Höhenformel . . . . .	104
2.3.2	Mikroskopisches Modell für ideale Gase . . . . .	105
2.3.3	Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung (eines idealen Gases) . . . . .	107
2.4	Reale Gase . . . . .	110
2.4.1	Stoßquerschnitt, mittlere freie Weglänge . . . . .	110
2.4.2	Transporsprozesse (in Gasen) . . . . .	112
2.4.3	Zustandsgleichung des realen Gases . . . . .	118
2.4.4	Isothermen realer Gase . . . . .	121
2.5	Thermische Eigenschaften von Materie . . . . .	124
2.5.1	Spezifische Wärme . . . . .	124
2.5.2	Adiabatische Zustandsänderung des idealen Gases . . . . .	129
2.5.3	Anmerkungen zu Phasenübergängen . . . . .	131
2.6	Die Hauptsätze der Thermodynamik . . . . .	133
2.6.1	Der erste Hauptsatz . . . . .	133
2.6.2	Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	135
2.6.3	Der Carnot-Prozess . . . . .	136
2.7	Entropie und Irreversibilität . . . . .	139
2.7.1	Reversibilität versus irreversible Prozesse . . . . .	139
2.7.2	Entropie . . . . .	140
2.7.3	Dritter Hauptsatz . . . . .	144
2.8	Formale Aspekte der Thermodynamik . . . . .	145
2.8.1	Beispiele zu Fragen der Thermodynamik . . . . .	145
2.8.2	Gibbs'sche Fundamentalform . . . . .	146
2.8.3	Intensive Variablen . . . . .	147

2.8.4	Zustandsgleichungen	148
2.8.5	Thermodynamisches Potential und Legendre-Transformationen	148
2.8.6	Beispiel: Ideales Gas	150
2.8.7	Thermisches Gleichgewicht und thermodynamische Extremalprinzipien	151
2.8.8	Thermodynamisches Gleichgewicht und Temperatur	153
<b>3</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>155</b>
3.1	Mathematischer Einschub: Geometrische Konzepte	155
3.1.1	Kartesische Koordinaten	155
3.1.2	Minkowski-Raum (MR), Minkowski-Metrik und Einstein'sche Inertialsysteme	155
3.1.3	Ausgezeichnete Koordinatentransformationen	156
3.1.4	Tensoren	157
3.2	Newton'sche Mechanik	159
3.2.1	Galilei-Invarianz	159
3.2.2	Widerspruch zwischen Wellengleichung und Maxwell-Theorie und Galilei-Invarianz	160
3.3	Relativitätsprinzip und Lorentztransformation	161
3.3.1	Einstein'sche Relativitätsprinzip	161
3.3.2	Lichtgeschwindigkeit $c$	161
3.3.3	Die speziellen Lorentztransformationen	161
3.3.4	Elementare Forderungen	164
3.4	Lorentzinvariante Formulierung physikalischer Gesetze: 1.Bsp. Doppler-Effekt	166
3.4.1	Longitudinaler Dopplereffekt	167
3.5	Relativistische / Einstein'schen Mechanik	168
3.5.1	Weltlinie und Eigenzeit	168
3.5.2	Vierergeschwindigkeit	168
3.5.3	Viererimpuls	169
3.5.4	Einstein'sche Bewegungsgleichung	170
<b>4</b>	<b>Analytische Mechanik</b>	<b>173</b>
4.1	Vorbemerkungen	173
4.2	Grundzüge der Variationsrechnung	173
4.2.1	Motivation und klassische Beispiele	173
4.2.2	Die Euler'sche Gleichung	175
4.2.3	Klassisches Beispiel: Brachistochrone	179
4.3	Lagrange-Mechanik	181
4.3.1	Prinzip von Hamilton	181
4.3.2	Elementare Beispiele	186
4.3.3	Axiome und Grundbegriffe der Lagrange Mechanik	193
4.3.4	Zwangsbedingungen	195
4.4	Symmetrien und Erhaltungssätze	199
4.4.1	Bahndeterminismus	200
4.4.2	Kovarianz und Koordinatentransformationen	200
4.4.3	Eichinvarianz	205
4.4.4	Noether Theorem	206
4.4.5	Isotropie / Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung im $N$ -Teilchen-System	209
4.5	Hamilton'sche Mechanik	210
4.5.1	Hamilton'sche Funktion und Hamilton'sche Gleichungen	210

---

4.5.2	Phasenraum . . . . .	212
4.5.3	Satz von Liouville . . . . .	213
4.5.4	Poisson-Klammern . . . . .	215
4.5.5	Kanonische Koordinatentransformationen . . . . .	219
4.5.6	Verallgemeinertes Noether Theorem . . . . .	220
4.6	Störungsrechnung . . . . .	222
4.6.1	Asymptotische Entwicklungen . . . . .	222
4.6.2	Multi-Skalenverfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . . .	222
4.6.3	Ausblick Chaos . . . . .	224

# Kapitel 1

## Optik

Dieses Kapitel befasst sich mit Licht als elektromagnetischer Welle. Hierbei werden die Maxwell-Gleichungen angewendet. Die Erzeugung und Vernichtung (Absorption) des Lichtes wird kaum diskutiert werden, da hierfür Kenntnisse aus dem Bereich der Quantenmechanik nötig sind. Außerdem wird keine Diskussion physiologischer Aspekte, wie beispielsweise des Auges oder des Gehirns stattfinden.

Als Literaturhinweis zum theoretischen Anteil dieses Kapitels sei das Buch „Arnold Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik“, Band IV: Optik, welches im Verlag Harri Deutsch erschienen ist, empfohlen.

### 1.1 Wiederholung der Elektrodynamik

#### 1.1.1 Die Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen für Vektorfelder. Sie beschreiben alle elektromagnetischen Phänomene, einschließlich der Optik. In diesem Zusammenhang sind die folgenden Vektorfelder relevant.  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  ist das magnetische Feld,  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  ist die magnetische Erregung,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  bezeichnet das elektrische Feld und  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  ist das elektrische Erregungs- oder Verschiebungsfeld.

Der Nabla-Operator fasst die partiellen Ableitungen der einzelnen Komponenten zusammen:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}.$$

Man kann sagen, dass der Nabla-Operator ein Vektor der partiellen Ableitungen ist.

##### 1.1.1.1 Homogene Maxwell-Gleichungen

Die homogenen Maxwell-Gleichungen beschreiben Bedingungen, die elektromagnetische Felder erfüllen müssen.

###### 1. Das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ist divergenzfrei.

Dies wird in differentieller Form durch

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (1.1.1)$$

ausgedrückt. Die integrale Form der Gleichung ist

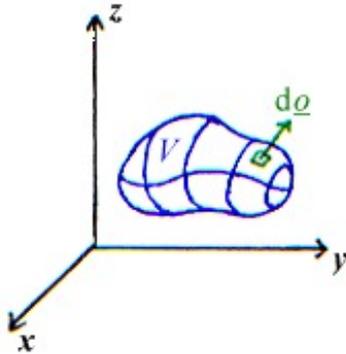
$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d^3r \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \\ &= \oint_{\partial V} d\sigma \hat{n} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t), \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

wenn man den magnetischen Fluss durch ein beliebiges Volumen  $V$  mit geschlossener Oberfläche  $\partial V$  und Normaleneinheitsvektor  $\vec{\sigma}$  zur Oberfläche (cf. Abb. 1.1) betrachtet. Hierbei wurde der Gauß'sche Satz verwendet.

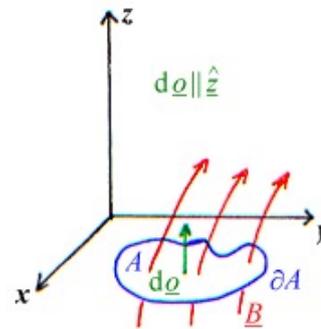
Betrachtet man den magnetischen Fluss durch eine Fläche  $A$  (cf. Abb. 1.2), so gilt

$$\int_A d\vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \int_A d\vec{r} \hat{n} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \int dy dy B_z(\vec{r}, t) \tag{1.1.3}$$

Die erste Maxwell-Gleichung besagt also, dass der magnetische Fluss durch eine geschlossene Ober-



**Abbildung 1.1:** Beliebiges Volumen  $V$ , durch welches ein magnetischer Fluss betrachtet wird.



**Abbildung 1.2:** Beliebige Fläche  $A$  in der  $x$ - $y$ -Ebene, durch die ein magnetischer Fluss betrachtet wird.

fläche  $\partial V$  eines beliebigen Volumens  $V$  verschwindet, das  $\vec{B}$ -Feld ist also quellenfrei.

## 2. Das Faraday'sche Induktionsgesetz

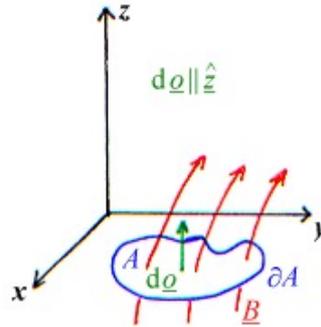
Für die differentielle Form überlegt man sich, dass ein zeitlich veränderliches  $\vec{B}$ -Feld ein elektrisches  $\vec{E}$ -Feld erzeugt. Es gilt also

$$\text{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\dot{\vec{B}}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t). \tag{1.1.4}$$

Für die integrale Form betrachtet man einen zeitlich veränderlichen magnetischen Fluss  $\vec{B}$  durch eine feste Fläche  $A$  mit geschlossenem Rand  $\partial A$  und Normaleneinheitsvektor  $\vec{\sigma}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_A d\vec{\sigma} \cdot \dot{\vec{B}}(\vec{r}, t) &\stackrel{\text{da } A \text{ fest}}{=} \frac{d}{dt} \int_A d\vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \stackrel{(1.1.4)}{=} - \int_A d\vec{\sigma} \cdot \nabla \times \vec{E} \\ &\stackrel{\text{Stokes'scher Satz}}{=} - \oint_{\partial A} d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t). \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Man erhält das Linienintegral über den geschlossenen Rand  $\partial A$ .



**Abbildung 1.3:** Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld  $\vec{B}$  durch eine konstante Fläche  $A$  mit geschlossenem Rand  $\partial A$ .

### 3. Elektromagnetische Potentiale

Die homogenen Maxwell-Gleichungen (1.1.1) und (1.1.4) sind erfüllt, wenn das elektrische Feld  $\vec{E}$  und das magnetische Feld  $\vec{B}$  aus einem skalaren (elektrischen) Potential  $\varphi(\vec{r}, t)$  und einem (magnetischen) Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  bestimmt sind über

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \dot{\vec{A}} \quad (1.1.6)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (1.1.7)$$

Beweis:

Man kann sich komponentenweise überlegen, dass  $\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ , sowie dass  $\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \nabla \times (-\nabla\varphi - \dot{\vec{A}}) + \partial_t(\nabla \times \vec{A}) = 0$ , da schon  $\nabla \times (-\nabla\varphi) = 0$ .

#### 1.1.1.2 Inhomogene Maxwell-Gleichungen

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen beschreiben, wie elektromagnetische Erregungen  $\vec{H}$  und  $\vec{D}$  aus „externen“ (oder „freien“ oder „experimentell kontrollierbaren“) Ladungsdichten  $\rho^{\text{ext}}(\vec{r}, t)$  und Stromdichten  $\vec{j}^{\text{ext}}(\vec{r}, t)$  erzeugt werden.

##### 1. Elektrische Ladungen

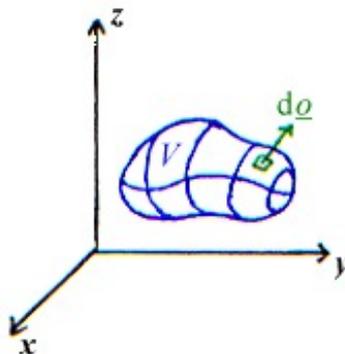
Die elektrische Verschiebungsdichte  $\vec{D}$  wird durch externe elektrische Ladungen erzeugt. In differentieller Form ausgedrückt bedeutet dies

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho^{\text{ext}}(\vec{r}, t). \quad (1.1.8)$$

In integraler Form haben wir

$$\int_V d^3r \rho^{\text{ext}} = Q^{\text{ext}}(t) = \int_V d^3r \nabla \cdot \vec{D} \stackrel{\text{Gauß'scher Satz}}{=} \oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t). \quad (1.1.9)$$

Dabei betrachten wir ein Volumen  $V$ , welches die externe Ladung  $Q^{\text{ext}}$  beinhaltet. Die Ladungen



**Abbildung 1.4:** Festes Volumen  $V$ , welches elektrische Ladungen beinhalten soll.

im Volumen  $V$  erzeugen einen elektrischen Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  von  $V$ . Ladungen sind also Quellen des elektrischen Feldes.

## 2. Maxwell'sches Verschiebungsgesetz

Die magnetische Erregung  $\vec{H}$  wird durch externe Stromdichten und Maxwell'schen Verschiebungsstrom  $\dot{\vec{D}}$  erzeugt. In differentieller Form heißt das

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}^{\text{ext}}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{D}}(\vec{r}, t). \quad (1.1.10)$$

In der integralen Form haben wir

$$\int_A d\vec{\sigma} \cdot (\vec{j}^{\text{ext}} + \dot{\vec{D}}) = \int_A d\vec{\sigma} \cdot \nabla \times \vec{H} \stackrel{\text{Stokes'scher Satz}}{=} \oint_{\partial A} d\vec{s} \cdot \vec{H}. \quad (1.1.11)$$

Hierbei kann man beispielsweise einen Kondensator der Fläche  $A$  betrachten, innerhalb dessen das elektrische Verschiebungsfeld  $\vec{D}$  herrscht. Dieser Kondensator ist in einen Leiter mit der Stromdichte  $\vec{j}^{\text{ext}}$ , welche die magnetische Erregung  $\vec{H}$  erzeugt, integriert. Maxwell forderte die Stetigkeit des  $\vec{H}$ -Feldes und folgerte daraus die Existenz des Verschiebungsstroms  $\dot{\vec{D}}$ .

### Bemerkung:

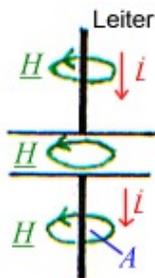
- Die Maxwell-Gleichungen sind acht gekoppelte lineare partielle Differentialgleichungen für zwölf Feldkomponenten ( $E_x, E_y, \dots$ ) bei gegebenen Ladungs- und Stromdichten  $\varrho^{\text{ext}}$  und  $\vec{j}^{\text{ext}}$ . Die Maxwell-Gleichungen sind also nicht geschlossen, legen die Felder also nicht eindeutig fest.
- Der Zusammenhang zwischen  $\varphi$ ,  $\vec{A}$  und  $\varrho$ ,  $\vec{j}$  wird später noch behandelt werden.

### 1.1.2 Vakuum-Polarisierbarkeit und Vakuum-Permeabilität

Werden Ladungen oder Ströme im Vakuum betrachtet, so gilt

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B},$$

wobei  $\varepsilon_0$  die Vakuum-Polarisierbarkeit und  $\mu_0$  die Vakuum-Permeabilität ist.



**Abbildung 1.5:** In einen Leiter integrierter Kondensator, bei welchem die magnetische Erregung untersucht wird.

### 1.1.3 Superposition und Komplexifizierung

Da die Maxwell-Gleichungen linear sind, ergeben sich nützliche Folgerungen zur Vereinfachung im Vakuum.

Seien  $\vec{E}_{(n)}$  und  $\vec{B}_{(n)}$  für  $n = 1, 2, \dots$  Lösungen der Maxwell-Gleichungen zu  $\varrho_{(n)}$  und  $\vec{j}_{(n)}$  und sind  $c_n \in \mathbb{C}$  Zahlen, so lösen die Superpositionen

$$\vec{E} = \sum_n c_n \vec{E}_{(n)}, \quad (1.1.12)$$

$$\vec{B} = \sum_n c_n \vec{B}_{(n)} \quad (1.1.13)$$

wieder die Maxwell-Gleichungen mit

$$\varrho = \sum_n c_n \varrho_{(n)}, \quad (1.1.14)$$

$$\vec{j} = \sum_n c_n \vec{j}_{(n)}. \quad (1.1.15)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \nabla \times \sum_n c_n \vec{B}_{(n)} = \sum_n c_n (\nabla \times \vec{B}_{(n)}) \\ &\stackrel{\text{M.-G.}}{=} \mu_0 \sum_n c_n (\vec{j}_{(n)} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}_{(n)}) = \mu_0 \sum_n c_n \vec{j}_{(n)} + \mu_0 \varepsilon_0 \sum_n c_n \dot{\vec{E}}_{(n)} \\ &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \end{aligned}$$

Die anderen Maxwell-Gleichungen kann man analog nachrechnen.

**Bemerkung:**

- $\vec{E} = \sum_n c_n \vec{E}_{(n)}$  heißt Superposition.
- Das Superpositionsprinzip ist eine Folge aus der Linearität der Maxwell-Gleichungen.

Seien  $\vec{E}_{(1)}$  und  $\vec{E}_{(2)}$ , sowie  $\vec{B}_{(1)}$  und  $\vec{B}_{(2)}$  Lösungen zu  $\varrho_{(1)}$ ,  $\varrho_{(2)}$  und  $\vec{j}_{(1)}$ ,  $\vec{j}_{(2)}$ . Dann folgt, dass

$$\vec{E} = \vec{E}_{(1)} + i\vec{E}_{(2)}, \quad (1.1.16)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{(1)} + i\vec{B}_{(2)} \quad (1.1.17)$$

(also  $c_1 = 1$  und  $c_2 = i$ ) Lösungen der Maxwell-Gleichungen zu  $\varrho = \varrho_{(1)} + i\varrho_{(2)}$  und  $\vec{j} = \vec{j}_{(1)} + i\vec{j}_{(2)}$  sind.

Beweis: s.o.

Man wendet diese Komplexifizierung bei reellen Felder der Gestalt  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$  an. Sie können auf diese Weise mit komplexen Feldern dargestellt werden. Es gilt

$$\vec{E}_{(c)}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{(c,0)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \in \mathbb{C} \quad (\vec{E}_{(c,0)} \in \mathbb{C}^3) \quad (1.1.18)$$

wobei

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}(\vec{E}_{(c)} + \vec{E}_{(c)}^*) = \Re\{\vec{E}_{(c)}(\vec{r}, t)\}, \quad (1.1.19)$$

da ja allgemein  $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x)$  gilt.

**Bemerkung:**

- Häufig wird es vergessen,  $\Re\{\dots\}$  zu schreiben. Nur die reellen Felder sind physikalisch relevant.
- Achtung: Bei nichtlinearen Ausdrücken verlangt diese komplexe Betrachtung, dass nur die explizit reellen (physikalischen) Felder eingesetzt werden.

## 1.2 Elektromagnetische Wellengleichung

Nach Maxwell und Faraday induzieren sich zeitabhängige elektrische und magnetische Felder gegenseitig.

### 1.2.1 Lichtgeschwindigkeit $c$

Im ladungsfreien und stromfreien Vakuum gilt das Faraday'sche Gesetz (1.1.4), und somit

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \vec{E})}_{=0, \text{ da } \varrho=0} - \nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \underbrace{\nabla \times \dot{\vec{H}}}_{\nabla \times \dot{\vec{H}} = -\varepsilon_0 \dot{\vec{E}} + \vec{j}=0} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\nabla^2 \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{E}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Setzt man die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$ , gegeben durch

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (1.2.2)$$

in die obige Gleichung (1.2.1) ein, so ergibt sich die homogene Wellengleichung des elektrischen Feldes

$$\boxed{\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0.} \quad (1.2.3)$$

Hierbei ist  $\Delta = \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$  der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten. Analog ergibt sich aus der Maxwell-Gleichung (1.1.10)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{H} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{B}}_{=0, \text{ da } \vec{B} \text{ quellenfrei}}) / \mu_0 - \Delta \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \epsilon_0 \ddot{\vec{B}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

die homogene Wellengleichung des magnetischen Feldes

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right) \vec{B}(\vec{r}, t) = 0.} \quad (1.2.5)$$

**Bemerkung:**

Es ist eine Errungenschaft der Maxwell-Gleichung, dass man die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  genau berechnen kann und zu zeigen, dass Licht eine Welle ist.

### 1.2.2 Exkurs zur skalaren Wellengleichung

Die homogene Wellengleichung für ein Skalarfeld  $\psi(\vec{r}, t)$  lautet

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \partial_t^2\right) \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.2.6)$$

Diese Gleichung kann beispielsweise die Ausbreitung von Schall in Wasser beschreiben. Im folgenden betrachten wir drei verschiedene Lösungen dieser Wellengleichung.

#### 1. Ebene Wellen

Hierbei verwenden wir den Lösungsansatz

$$\psi(\vec{r}, t) = f_+(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t) + f_-(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

mit konstantem Vektor  $\vec{k}$  und konstantem  $\omega$ . Diese Funktion löst die Gleichung (1.2.6) für beliebige (zweimal stetig differenzierbare) Funktionen  $f_{\pm}$  genau dann, wenn

$$\omega = \omega(\vec{k}) = v \cdot |\vec{k}| \quad (1.2.7)$$

gilt.

**Bemerkung:**

- $\varphi_{\pm} = \vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t$  heißt Phase. Es gilt  $\psi(\vec{r}, t) = f_+(\varphi_+) + f_-(\varphi_-)$ . Meistens ist aber nur  $\varphi_-$  interessant.
- $\vec{k}$  heißt Wellenvektor
- $\omega$  heißt (Kreis-) Frequenz.
- Die Beziehung (1.2.7) heißt Dispersionsrelation.

- $\psi$  heißt ebene Welle, weil für festes  $t = t_0$  die Flächen, auf denen  $\psi(\vec{r}, t = t_0) = const$  gilt („Wellenfronten“) Ebenen sind, welche durch die Ebenengleichung

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = const \Rightarrow \varphi_{\pm}(\vec{r}, t = t_0) = konst.,$$

bestimmt wird. Daraus folgt direkt, dass die Wellenfronten senkrecht zu  $\vec{k}$  stehen (cf. Abb 1.6).

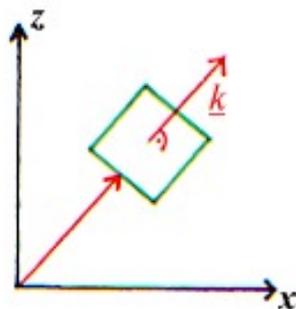


Abbildung 1.6:  $\vec{k}$  steht senkrecht auf den Wellenfronten

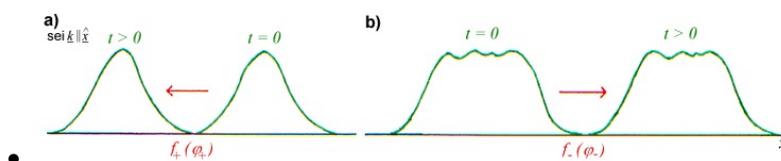


Abbildung 1.7: Mit der Phase  $\varphi_+$  liegt eine nach  $-\vec{k}$  laufende Erregung vor (links), mit der Phase  $\varphi_-$  läuft die Erregung nach  $+\vec{k}$  (rechts).

Aus den Bedingungen für Punkte gleicher Phase

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) &= \varphi_{\pm}(\vec{r}, t) \\ \Leftrightarrow \vec{k} \cdot \Delta\vec{r} &= \mp \omega \Delta t, \end{aligned}$$

wobei  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot \Delta t$ , folgt, dass sich die Wellenfronten mit konstanter „Phasengeschwindigkeit“  $\pm v$ , wobei

$$\vec{v} = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\omega}{k^2} \vec{k}, \tag{1.2.8}$$

bewegen.

- Bei dieser speziellen Lösung handelt es sich um die ebenen Wellen nach D’Alambert.

Beweis:

Es gilt

$$\nabla \cdot \nabla f_{\pm}(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t) = \nabla \cdot \vec{k} f'_{\pm} = k^2 f''_{\pm},$$

wobei  $f''(\varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 f(\varphi)$ . Außerdem gilt

$$\partial_t^2 f_{\pm}(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t) = \partial_t(\pm \omega) f'_{\pm} = \omega^2 f''_{\pm}.$$

Setzt man diese beiden Gleichungen in (1.2.6) ein, so ergibt sich

$$\left( \underbrace{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}_{=0, \text{ cf. (1.2.7)}} \right) f_{\pm}(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t) = 0.$$

**Bemerkung:**

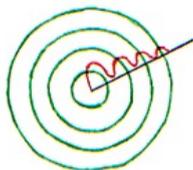
Die Dispersionrelation (hier  $\omega = kv$ ) muss erfüllt sein, damit die homogene (d.h. quellenfreie) Wellengleichung nicht triviale ( $f_{\pm} \neq 0$ ) Lösungen besitzt.

## 2. Kugelwellen

Kugelwellen sind radialsymmetrische Wellen  $\psi(\vec{r}, t)$  mit

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(r = |\vec{r}|, t) = \frac{1}{r}(g_+(r + rt) + g_-(r - rt)). \quad (1.2.9)$$

Der in (1.2.9) gegebene Funktionsterm löst die homogene Wellengleichung für skalare Felder (1.2.6). Kugelwellen haben Wellenfronten, welche Kugeloberflächen ( $|\vec{r}| = \text{const}$ ) darstellen. Ihre Amplitude variiert mit  $\frac{1}{r}$ . Die Richtigkeit der Lösung lässt sich durch Einsetzen beweisen.



**Abbildung 1.8:** Bei der Ausbreitung von Kugelwellen nimmt die Amplitude proportional zum Radius ab.

## 3. Ebene monochromatische Wellen

Hier wird nun ein sehr wichtiger Spezialfall der ebene Wellen besprochen, bei dem  $f_{\pm}$  periodisch ist. Das heißt

$$f_{\pm}(\varphi_{\pm} = \vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t) = A_{\pm} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \delta_{\pm}). \quad (1.2.10)$$

Für festes  $\vec{r}_0$  ist  $f_{\pm}$  periodisch mit der Zeit, also

$$f_{\pm}(\vec{r}_0, t + mT) = f_{\pm}(\vec{r}_0, t) \quad \text{mit } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

mit Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$  und Frequenz  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ . Für festes  $t_0$  ist  $f_{\pm}$  periodisch im Raum:

$$f_{\pm}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t_0) = f_{\pm}(\vec{r}, t_0),$$

wenn  $\Delta\vec{r} \cdot \vec{k} = 2\pi m$ , mit  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Zur Vereinfachung setzt man  $\vec{k} \parallel \hat{x}$  mit  $\Delta x = \frac{2\pi}{k} m = \lambda m$ . Die Welle breitet sich also in  $x$ -Richtung aus. Hierbei ist  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  die Wellenlänge. Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu} \\ \Leftrightarrow v &= \lambda \nu \quad \text{und} \quad vT = \lambda. \end{aligned}$$

### 1.2.3 Transversalität elektromagnetischer Wellen

Die elektromagnetischen Wellengleichungen (1.2.3) und (1.2.5) werden also durch ebene monochromatische Wellen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\varphi} \quad (1.2.11)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{B}_0 \cdot e^{i\varphi} \quad (1.2.12)$$

gelöst mit  $\vec{E}_0, \vec{B}_0 \in \mathbb{C}^3$ . (Eigentlich  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}\}$  etc., im folgenden wird  $\Re\dots$  aber immer kommentarlos weggelassen werden.)

Nun bleibt noch zu klären, warum (1.2.11) und (1.2.12) die Maxwell-Gleichungen (1.1.1), (1.1.4), (1.1.8) und (1.1.10) löst.

- (1.1.8):  $\varepsilon_0 \nabla \vec{E} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i\varphi} = 0$ . Da  $e^{i\varphi} \neq 0$ , gilt

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0. \quad (1.2.13)$$

- (1.1.1):  $\nabla \vec{B} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{B}_0 e^{i\varphi} = 0$ . Da  $e^{i\varphi} \neq 0$ , gilt

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0. \quad (1.2.14)$$

- (1.1.4):  $\dot{\vec{B}} = -\nabla \times \vec{E} \Rightarrow (-i\omega \vec{B}_0 + i\vec{k} \times \vec{E}_0) e^{i\varphi} = 0$ . Da  $e^{i\varphi} \neq 0$ , gilt

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \vec{k} \times \vec{E}_0. \quad (1.2.15)$$

- (1.1.10):  $c^2 \nabla \times \vec{B} - \dot{\vec{E}} = 0 \Rightarrow (ic^2 \vec{k} \times \vec{B}_0 + i\omega \vec{E}_0) e^{i\varphi} = 0$ . Da  $e^{i\varphi} \neq 0$ , gilt

$$\vec{E}_0 = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0. \quad (1.2.16)$$

Aus (1.2.15) und (1.2.16) folgt

$$\vec{E}_0 = -\frac{c^2}{\omega^2} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) \stackrel{(1.2.14)}{=} \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 \vec{E}_0.$$

**Fazit:**

Ebene, monochromatische Wellen lösen die Maxwell-Gleichungen im Vakuum, sowie die elektromagnetische Wellengleichung. Außerdem sind sie „transversale Wellen“. Wir haben gesehen, dass

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{i\varphi},$$

sowie

$$\begin{aligned} \varphi &= \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \\ \omega &= ck \quad (\text{Dispersionsrelation}) \\ \vec{k} \cdot \vec{E}_0 &= 0 = \vec{k} \cdot \vec{B}_0 \\ \vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 &\stackrel{(1.2.15)}{=} 0 \\ |\vec{B}_0| &= \frac{1}{c} |\vec{E}_0|. \end{aligned}$$

Außerdem ist zu bemerken, dass  $\vec{k}$  in Ausbreitungsrichtung zeigt. Bei elektromagnetischen Wellen steht das  $E$ -Feld immer senkrecht auf dem  $B$ -Feld und das  $E$ -Feld und das  $B$ -Feld schwingen in Phase. Abbildung 1.9 veranschaulicht dies grafisch.

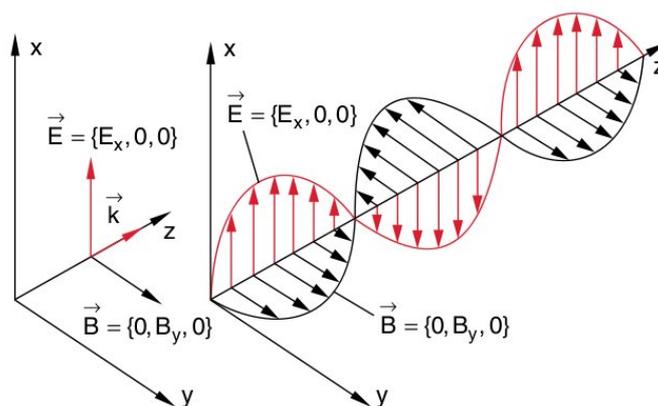


Abbildung 1.9:  $E$ - und  $B$ -Feld einer elektromagnetischen Welle.

### 1.2.4 Energiedichte elektromagnetischer Felder

Die Energiedichte des elektrischen und des magnetischen Feldes kann durch

$$w_e(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t), \quad (1.2.17)$$

$$w_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (1.2.18)$$

beschreiben. Es gilt

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) = \frac{1}{2} (\dot{\vec{E}} \cdot \vec{D} + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}}). \quad (1.2.19)$$

Aus  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$  folgt  $\dot{\vec{E}} \cdot \vec{D} = \dot{\vec{E}} \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \cdot \vec{E} = \dot{\vec{D}} \cdot \vec{E}$ . Damit haben wir

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}}, \quad (1.2.20)$$

und ebenso

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = \vec{B} \cdot \dot{\vec{H}}. \quad (1.2.21)$$

Nun benutzen wir die Maxwell-Gleichung (1.1.4)

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} \quad | \cdot \vec{H} \\ \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} &= -\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} = -\frac{\partial w_m}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

und die Maxwell-Gleichung (1.1.10)

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \dot{\vec{D}} \quad | \cdot \vec{E} \\ \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} &= \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} \\ &= \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial w_e}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Aus (1.2.22) und (1.2.23) ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} &= -\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m). \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Wir nennen  $w_e + w_m = w_{em}$  die Gesamtenergiedichte. Es gilt

$$w_{em} = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2 + c^2 \cdot B^2) \quad (1.2.25)$$

Definiton: Poyntingvektor

Der Poyntingvektor  $\vec{S}$  ist definiert als  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ .

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}} \quad (1.2.26)$$

Der Poyntingvektor  $\vec{S}$  ist der Vektor der Energiestromdichte. Zur Verdeutlichung sei die obige Gleichung in integraler Form dargestellt. Integration über ein Volumen  $V$  ergibt

$$\frac{d}{dt} \int_V w_{em}(\vec{r}, t) d^3r + \int_{\partial V} \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{n} = - \int_V \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) d^3r. \quad (1.2.27)$$

## 1.2.5 Energiedichte und Energiestromdichte ebener elektromagnetischer Wellen

Die Lösungen der homogenen Wellengleichungen (1.2.3) und (1.2.5) sind die komplexen Felder

$$\begin{aligned} \vec{E}_c(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \vec{E}_0 (\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + i \cdot \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{B}_c(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \Re\{\vec{E}_c\} = \frac{1}{2}(\vec{E}_c + \vec{E}_c^*) \\ &= \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\end{aligned}$$

haben wir auch

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1.2.28)$$

Hierbei gilt natürlich stets die Dispersionsrelation  $\omega = c \cdot |\vec{k}| = 2\pi\nu$ . Es ergibt sich für die Energiedichten

$$\begin{aligned}w_e(\vec{r}, t) &= \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} (\Re\{\vec{E}_c\} + |\vec{E}_c|^2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}w_m(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{\omega^2} (\vec{k} \times \vec{E}) \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c^2} \vec{E}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = w_e(\vec{r}, t).\end{aligned}$$

Die elektrische und die magnetische Energiedichte sind stets gleich groß. Die totale Energiedichte  $w_{em}$  ist die Summe dieser beiden Energiedichten, also

$$w_{em} = w_e + w_m = \varepsilon_0 E^2. \quad (1.2.29)$$

Mittelt man die totale Energiedichte über die Zeit (geschrieben als  $\langle w_{em} \rangle_{\text{Zeit}}$ ), so erhält man

$$\langle w_{em} \rangle_{\text{Zeit}} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} |\vec{E}_0|^2 \quad (1.2.30)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\omega} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 \omega} E^2 \cdot \vec{k} = \varepsilon_0 E^2 c \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \\ &= w_{em} c \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.\end{aligned} \quad (1.2.31)$$

Der Poyntingvektor beschreibt also den Fluss der elektromagnetischen Energiedichte entlang des Vektors  $\vec{k}$ . Im zeitlichen Mittel folgt aus (1.2.31)

$$\langle \vec{S} \rangle_{\text{Zeit}} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 c \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \quad (1.2.32)$$

Am Ende dieses Abschnittes betrachten wir in Abbildung 1.10 einen abstrahlenden Dipol. Man sieht, dass die meiste Energie senkrecht zur  $z$ -Achse abgesendet wird.

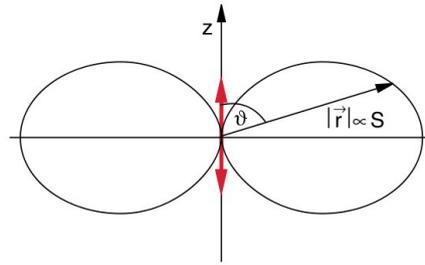


Abbildung 1.10: Leistungsabstrahlung eines oszillierenden Dipols.

### 1.2.6 Polarisation ebener elektromagnetischer Wellen

#### 1. Lineare Polarisation:

Der Vektor  $\vec{E}_0$  der Welle  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(kz - \omega t)}$  zeigt immer in die gleiche Richtung (mit positivem oder negativem Betrag), senkrecht zu  $\hat{e}_z$  (was hier auch die Ausbreitungsrichtung ist). Daher gilt auch  $\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$ . Wir haben also

$$\vec{E} = E_{0x} \hat{e}_x + E_{0y} \hat{e}_y.$$

Beide Komponenten  $E_x = E_{0x} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$  und  $E_y = E_{0y} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$  sind immer in Phase. Man spricht dann von einer linear polarisierten Wellen. Die Abbildung 1.11 veranschaulicht dies.

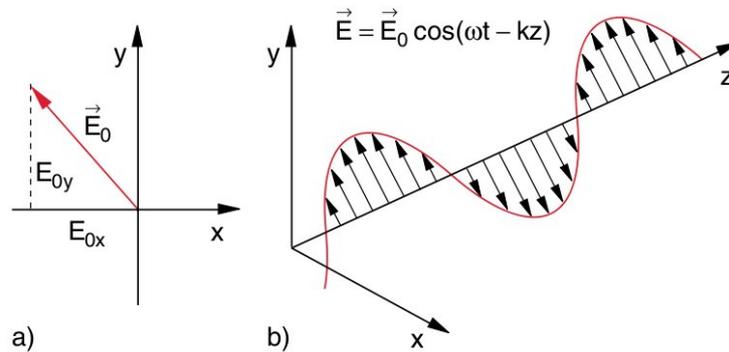


Abbildung 1.11: Linear polarisierte elektromagnetische Welle.

#### 2. Zirkulare Polarisation:

Beträge von  $E_x$  und  $E_y$  sind gleich ( $E_{0x} = E_{0y}$ ) und beide Wellen sind um  $90^\circ$  phasenverschoben, d.h.  $E_x = E_{0x} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$ ;  $E_y = E_{0y} \cdot e^{i(kz - \omega t + \pi/2)}$ . Der summierte Vektor  $\vec{E}_0$  dreht sich also. Es gibt natürlich zwei Richtungen (rechtszirkular und linkszirkular). Dies wird in Abbildung 1.12 veranschaulicht (roter Pfeil).

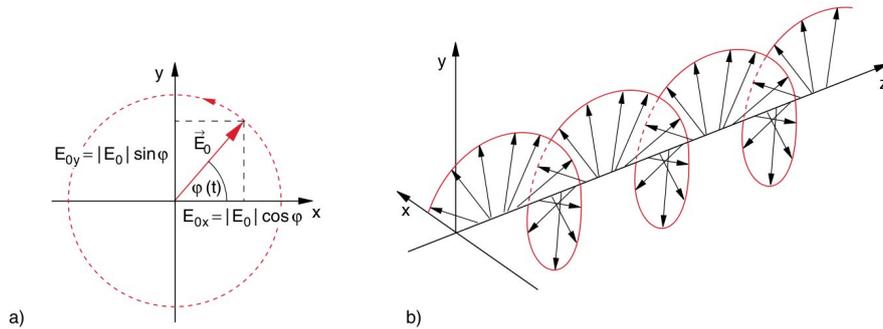


Abbildung 1.12: Linkszirkular polarisierte elektromagnetische Welle.

3. **Elliptische Polarisation:**

Allgemeiner Fall, in dem die Beträge von  $E_x$  und  $E_y$  gleich sind ( $E_{0x} = E_{0y}$ ), beide Wellen aber um eine beliebige Phase  $\varphi$  verschoben sind, d.h.  $E_x = E_{0x} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$ ;  $E_y = E_{0y} \cdot e^{i(kz - \omega t + \varphi)}$ .

## 1.3 Charakteristische Eigenschaften von elektromagnetischer Strahlung

### 1.3.1 Der oszillierende Dipol als Quelle elektromagnetischer Strahlung

Es werden aus dem Nahfeld Feldlinien des  $\vec{E}$ - und des  $\vec{B}$ -Feldes abgeschnürt, was zu Strahlung führt. Der Poyntingvektor zeigt in die Richtung dieser Abstrahlung und ist ein Maß für die Energiedichte. Beim Übergang vom Nahfeld ins Fernfeld findet eine Phasenverschiebung um  $90^\circ$  statt. Das abgestrahlte Feld kann man durch

$$|\vec{E}| = \frac{P_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\sin(\theta) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}{r} = \underbrace{\frac{\ddot{P}(t - \frac{r}{c}) \sin(\theta)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r}}_{\text{allg. Darst.}} \tag{1.3.1}$$

ausdrücken. Das Dipolmoment ist dann gegeben durch

$$p(t) = P_0 \cos(\omega t) = qd_0 \cos(\omega t), \tag{1.3.2}$$

wobei  $q$  die Ladung ist und  $d_0$  der maximal Abstand der schwingenden Ladungen. Wir erhalten für die winkelabhängige Energiedichte

$$S(t) = \frac{q^2 d_0^2 \omega^4 \sin^2(\theta)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right). \tag{1.3.3}$$

Hierbei kommt  $r$  im Nenner quadratisch vor, weil die gesamte abgestrahlte Energie konstant ist. Durch jede Kugelschale, die man um den Dipol legt, dringt also gleich viel Feldenergie. Diese Kugelschalen wachsen aber proportional zu  $r^2$ . Schließlich kann man noch die über die Zeit  $t$  und  $\theta$  gemittelte abgestrahlte Leistung

$$\langle P_{em} \rangle_{t,\theta} = \frac{P_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \tag{1.3.4}$$

angeben.

### 1.3.2 Licht besteht aus Photonen

Besonders im höherenergetischen Bereich ist es nötig bei der Betrachtung der Erzeugung und Detektion von Licht Photonen einzuführen. Ein Photon hat die Energie  $E = h\nu$  mit dem Planck'schen Wirkungsquantum  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  und dem Impuls  $p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$  mit  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

## 1.4 Brechungsindex und Dispersion

### 1.4.1 Maxwell-Gleichungen und elektromagnetische Wellengleichung in dielektrischer Materie

Im Vakuum gelten bekanntlich die vier Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

mit  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ . In Materie muss  $\varepsilon$  und  $\mu$  noch beachtet werden. Folglich gilt  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ . Es gilt immer  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu > 0$ .

### 1.4.2 Makroskopische Definition des Brechungsindex $n$

Der Brechungsindex  $n$  ist durch  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$  oder alternativ auch (wie in vielen Büchern) durch  $n = \frac{c_0}{c}$  definiert.

Dringt Licht in verschiedene dielektrische Medien ein, so ändert sich seine Frequenz nicht, die Wellenlänge aber schon, gemäß

$$\lambda_{\text{Medium}} = \frac{\lambda_{\text{Vakuum}}}{n}; \quad k_{\text{Medium}} = n \cdot k_{\text{Vakuum}}.$$

Bei der Wellenbetrachtung des Lichtes ist  $c_0$ ,  $c$  die Phasengeschwindigkeit  $c = \frac{\omega}{k_{\text{Mat.}}}$ ,  $c_0 = \frac{\omega}{k_{\text{Vak.}}}$ . Anschaulich kann man sich den Vorgang, wenn eine elektromagnetische Welle in ein dielektrisches Medium eindringt, ungefähr folgendermaßen vorstellen. Die Welle trifft auf die erste Atomschicht, was dazu führt, dass sich kleine Dipole bilden. (Die Elektronenwolken werden etwas gegen den Kern ausgelenkt.) Es werden eigene Schwingungen erzeugt, was dazu führt, dass diese neu entstandenen Dipole eine Sekundärwelle abstrahlen. Diese Sekundärwelle überlagert sich mit der ursprünglichen Welle. Auf diese Weise entsteht eine Phasenverschiebung.

Die elektrische Polarisation eines Mediums  $\vec{P}$  kann beschrieben werden durch

$$\vec{P}(t) = \alpha \vec{E}(t), \tag{1.4.1}$$

wobei  $\alpha$  die Polarisierbarkeit (also eine Zahl) des Mediums ist. Die oben schon erwähnten Dipole ( $\vec{P}$ ) erzeugen eine Sekundärwelle in gleicher Richtung wie die Primärwelle. Hierbei ist festzuhalten:

- Die Sekundärwelle (im Fernfeld) eilt der Primärwelle um  $90^\circ$  voraus, weil  $\Delta\varphi = 90^\circ$  bei einer Dipolstrahlung, wie in Abschnitt 1.3.1 auf Seite 21 diskutiert.
- Die Sekundärwelle hat eine sehr kleine Amplitude  $E_k$ , weil  $\alpha \ll 1$ .

Bei der komplexen Betrachtung der  $E$ -Felder kann man dann die Primärwelle und die Sekundärwelle einfach addieren. Es gilt also für die Gesamtwelle

$$\vec{E}_{\text{res}} = \vec{E}_{\text{prim}} + \sum_k \vec{E}_k. \quad (1.4.2)$$

Im Weiteren gilt für die resultierende Welle

$$\begin{aligned} E_0 &= E_{\text{res}} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \\ E &= E_{\text{res}} \cdot e^{i\omega(t - \frac{z}{c_0} - (n-1)\frac{\Delta z}{c_0})} \\ E &= E_{\text{primär}} \cdot e^{i\varphi} = E_{\text{primär}} \cdot e^{-i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c_0}} \end{aligned}$$

Bei der zweiten, der obigen Gleichungen kann man im Exponenten der  $e$ -Funktion noch gut den Teil des ungestörten Feldes  $t - \frac{z}{c_0}$  und den Einfluss des Mediums  $(n-1)\frac{\Delta z}{c_0}$  sehen. Für sehr kleine Phasenverschiebungen  $\varphi \ll 1$  kann man die Näherung

$$e^{-i\varphi} = 1 - i\varphi + \dots$$

anwenden. Damit bekommen wir

$$E(z) = \underbrace{E_0 \cdot e^{i\omega(t - \frac{z}{c_0})}}_{=E_{\text{prim}}} - i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c_0} E_0 \cdot e^{i\omega(t - \frac{z}{c_0})}. \quad (1.4.3)$$

Man sieht, dass in der Näherung vom Ursprünglichen Feld ein zweites (sekundäres) Feld abgezogen wird. Diese Näherung lässt sich beispielsweise bei Gasen gut anwenden, weil der Brechungsindex dort in der Regel sehr klein ist.

### 1.4.3 Lorentz-Modell zur Dispersion $n(\lambda)$

Dispersion bedeutet, dass der Brechungsindex  $n$  von der Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes abhängt. Im Lorentz-Modell werden einzelne Atome als Oszillator betrachtet. Im einfallenden elektrischen Feld werden die Atome zu Dipolen mit Dipolmoment  $p = -ex(t)$ . Hierbei ist  $e$  natürlich die Elementarladung. (Um Verwirrungen zu vermeiden ist die Exponentialfunktion  $e^x$  in diesem Abschnitt immer mit  $\exp()$  notiert.) Man erhält die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = -eE_0 \exp(i(\omega t - kz)). \quad (1.4.4)$$

Mit der Substitution  $\gamma = \frac{b}{m}$  erhält man

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \quad (1.4.5)$$

Wir erhalten die Differentialgleichung, die eine harmonische Oszillation unter äußerer Krafteinwirkung beschreibt. Ein solches Modell kann angewendet werden, da bei genügend kleinen Auslenkungen quasi alle Schwingungen näherungsweise harmonisch sind. Als Lösung für die Gleichung erhalten wir

$$x(t) = x_0 \exp(i\omega t) \quad (1.4.6)$$

am Ort  $z = 0$  (Position des schwingenden Atoms) mit  $x_0 = \frac{eE_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$ , also insgesamt

$$x(t) = -\frac{eE_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \exp(i(\omega t + \varphi)); \quad \tan(\varphi) = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.4.7)$$

Hierbei ist  $\varphi$  dann der Phasenunterschied zwischen  $E$  und  $P$ . Vergleiche hierzu auch Abschnitt 1.3.1. Das Fernfeld des abstrahlenden Dipols  $p = -ex(t)$  im Abstand  $r$  ist

$$E_0 = -\frac{e\omega^2 x_0}{4\pi\epsilon_0 c_0^2 r} \exp\left(i\omega\left(\frac{r}{c_0}\right)\right). \quad (1.4.8)$$

Nun wollen wir die soeben angestellten Betrachtungen auf viele Dipole ausweiten. Deshalb untersuchen wir jetzt alle Dipole in der Scheibe  $\Delta z \int N dA$ . Vergleiche auch Abbildung 1.13. Für das Gesamtfeld  $E(z)$

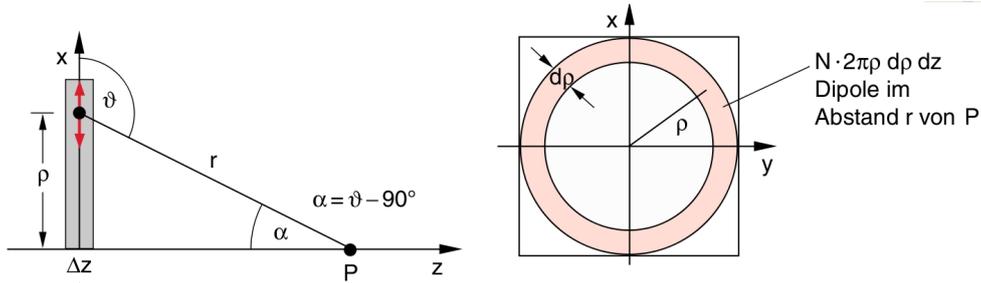


Abbildung 1.13: Schicht der Dicke  $\Delta z$  des Mediums mit Dipolen.

gilt (im Schritt von der ersten zur zweiten Zeile wird genutzt, dass  $\varrho d\varrho = r dr$ , siehe Abb. 1.13)

$$\begin{aligned} E(z) &= -\frac{e\omega^2 x_0 \exp(i\omega t)}{4\pi\epsilon_0 c_0^2} \Delta z \int_0^\infty N \frac{\exp\left(-i\omega \frac{r}{c_0}\right)}{r} 2\pi \varrho d\varrho \\ &= -\frac{e\omega^2 x_0 \exp(i\omega t)}{2\epsilon_0 c_0^2} \Delta z \int_{r=z}^\infty N \exp\left(-i\omega \frac{r}{c_0}\right) dr \\ &= -\frac{e\omega^2 x_0 \exp(i\omega t)}{2\epsilon_0 c_0^2} \Delta z \frac{c_0}{i\omega} \left[ B \exp\left(-i\omega \frac{r}{c_0}\right) \right]_z^\infty \\ &= \frac{i\omega e x_0 N \Delta z}{2\epsilon_0 c_0} \exp\left(i\omega\left(t - \frac{z}{c_0}\right)\right). \end{aligned}$$

Jetzt wird noch  $x_0 = -\frac{eE_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$  aus dem Lorentz-Modell eingesetzt. Beachte, dass jetzt  $r = z$ .

$$E(z) = -i\omega \frac{\Delta z}{c_0} \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega)} E_0 \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r}{c_0}\right)\right). \quad (1.4.9)$$

Wir setzen jetzt die Gleichungen (1.4.3) und (1.4.9) gleich. Damit erhalten wir

$$\boxed{n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m((\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega)}} = n(\omega) \quad (1.4.10)$$

Hierbei ist  $m$  nach wie vor die Masse eines Elektrons. Das Lorentz-Modell geht von genau einer Resonanzfrequenz aus. In Wirklichkeit haben Atome aber viele Resonanzfrequenzen. Hierin liegt eine Schwäche des Modells.

#### 1.4.4 Absorbtion und Imaginärteil von $n$

Gemäß der soeben gefundenen Beziehung (1.4.10) gilt auch

$$n(\omega) = 1 + \frac{Ne^2((\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma)}{2\varepsilon_0 m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)} = n' - i\kappa = \Re(n) - i(-\Im(n))$$

Daraus folgt

$$E(z) = E_0 \underbrace{\exp\left(-\omega\kappa \frac{\Delta z}{c_0}\right)}_{\text{Dämpfung}} \underbrace{\exp\left(i\omega(n' - 1) \frac{\Delta z}{c_0}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z))}_{\text{Welle}}. \quad (1.4.11)$$

Man kann die Absorbtionslänge  $\frac{c_0}{\omega\kappa} = \frac{1}{k_0\kappa}$  sehen. Über diese Länge fällt die Welle auf das  $\frac{1}{e}$  fache ab (Hier ist  $e$  schon die Euler'sche Zahl).

Die Intensität einer Welle ist ja gegeben durch

$$I = c_0 \varepsilon_0 |E|^2.$$

Mit dem Absorbtionskoeffizienten  $\alpha$  gilt

$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha z).$$

Daraus folgt

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda_0} \kappa = 2k_0\kappa. \quad (1.4.12)$$

Nun haben wir auch die Dispersionrelation

$$n' = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2} \quad (1.4.13)$$

$$\kappa = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2} \quad (1.4.14)$$

#### 1.4.5 Brechungsindex für Materie, $n > 1$ (nicht $n \approx 1$ )

In diesem Abschnitt wollen wir also etwas dichtere Materie betrachten. Wir beginnen mit der Materialgleichung

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (1.4.15)$$

Bisher haben wir die elektrische Polarisation  $\vec{P}$  als sehr klein betrachtet. Das machen wir jetzt nicht mehr. Wir setzen außerdem  $\mu = 1$ , betrachten also ein nicht magnetisches Material. Wir setzen also die

Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.4.16)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\text{neu}} \right) \quad (1.4.17)$$

$$\underbrace{\operatorname{div} \vec{D}}_{\text{neu}} = \varrho \quad (1.4.18)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.4.19)$$

mit den gekennzeichneten neuen Termen voraus. Damit taucht  $\vec{P}$  in der Wellengleichung auf.

### 1.4.5.1 Isolatoren

Bei Isolatoren gilt  $\vec{j} = 0$ ,  $\varrho = 0$ , da  $\sigma = 0$ . (Zur Erinnerung:  $\sigma$  ist die Leitfähigkeit mit  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ .) Aus (1.4.15) und (1.4.17) folgt

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (1.4.20)$$

und wir erhalten jetzt die Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (1.4.21)$$

mit  $\vec{P} = N\alpha \vec{E}$ , wobei  $\alpha$  wieder die elektrische Polarisierbarkeit ist. Wir diskutieren die spezielle Lösung dieser Gleichung, die eine ebene Welle mit  $\vec{k} = (0, 0, k_z)$  und  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$  ist. Dann ist  $\vec{P} = (P_x, 0, 0)$ , mit

$$P_x = N\alpha E_x = N\alpha E_0 e^{i(\omega t - kz)},$$

wobei  $N$  die Anzahl der Dipole pro Volumen ist. Wir setzen  $E_x$  und  $P_x$  in die Wellengleichung (1.4.21) ein und erhalten

$$\begin{aligned} -k^2 E_x &= -\frac{\omega^2}{c_0^2} E_x - \frac{\omega^2 N\alpha}{\varepsilon_0 c_0^2} E_x \\ \Rightarrow k^2 &= \frac{\omega^2}{c_0^2} \left( 1 + \frac{N\alpha}{\varepsilon_0} \right). \end{aligned}$$

Mit  $n = \frac{c_0 k}{\omega}$  erhalten wir

$$\boxed{n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}} \quad (1.4.22)$$

Im Lorentz-Modell hatten wir gefunden

$$p = \frac{e^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)},$$

wobei sich  $p$  immer nur auf ein Atom bezieht, wegen  $p = \alpha E$ . Es folgt

$$\alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$$\Rightarrow \boxed{n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}} \quad (1.4.23)$$

Für  $n \rightarrow 1$  geht dies in den Fall eines verdünnten Mediums über, der in Abschnitt 1.4.3 diskutiert wurde.

### 1.4.5.2 Metalle

Bei Metallen gilt  $\sigma \neq 0$ , wegen der freien Elektronen. Jetzt ergibt sich aus (1.4.17) und dem Ohm'schen Gesetz  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  als Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \underbrace{\mu_0 \sigma}_{\text{Dämpfungsterm}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4.24)$$

An dieser Stelle wollen wir nicht diskutieren, welcher Teil der elektromagnetischen Welle tatsächlich in das Metalle indringt (das machen wir später), sondern nur, wie die Welle im Medium gedämpft wird. Wir betrachten also den Ansatz einer gedämpften Welle

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\alpha/2z} e^{i(\omega t - kz)}.$$

Hierbei ist  $\alpha$  der Absorptionskoeffizient. Es ist zu bemerken, dass die freien Elektronen im Metall keine Rückstellkraft spüren, d.h. die Resonanzfrequenz  $\omega_0 = 0$ . Unter Betrachtung von (1.4.23) folgt

$$\boxed{n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega^2 - i\gamma\omega)}} \quad (1.4.25)$$

Die Dämpfung der Welle erfolgt weder der Stöße der Elektronen mit Gitterfehlstellen bzw. Gitterschwingungen (Drude-Modell). Die mittlere freie Weglänge werde hierbei mit  $l$  bezeichnet, die Geschwindigkeit der Elektronen sei  $v_e$  und die Stoßzeit  $\tau = \frac{l}{v_e} = \frac{1}{\gamma}$ .

Im Drude-Modell (hier ohne tiefere Begründung) gilt

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m} \tau = \frac{Ne^2}{m\gamma}$$

$$\Rightarrow n^2(\sigma) = 1 + \frac{\sigma/\varepsilon_0}{i\omega(1 + i\omega\tau)} \quad (1.4.26)$$

Diese Gleichung wollen wir nun für zwei Fälle diskutieren.

1. Hohe Frequenzen  $\omega\tau \gg 1$ . Dann gilt

$$n^2 \approx 1 - \frac{\sigma/\varepsilon_0}{\omega^2\tau} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

mit der Plasmafrequenz  $\omega_p = \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon_0\tau}} = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$ . Bei Kupfer gilt beispielsweise  $\sigma = 6 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$ ,  $\tau = 2,7 \cdot 10^{-14} \text{s}$  und  $\omega_p = 1,6 \cdot 10^{16} \text{s}^{-1}$ . Die Plasmafrequenz ist die Frequenz, mit der das freie Elektronengas gegen die Ionenrümpfe schwingt (siehe Festkörperphysik).

2. Niedrige Frequenz und große Dämpfung  $\omega\tau \ll 1$ . Es gilt

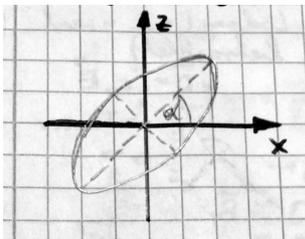
$$n \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}}(1 - i) = n' - i\kappa$$

mit  $\kappa = \sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}}$ .

Es gilt für den Absorptionskoeffizienten  $\alpha = 2k_0\kappa = \sqrt{\frac{2\sigma\omega}{\varepsilon_0 c_0^2}}$  mit  $k_0 = \frac{\omega_0}{c_0}$ . Die Welle wird auf einer Strecke  $\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 c_0^2}{2\sigma\omega}}$  auf ihr  $1/e$ -Faches abgeschwächt. Die Absorptionslänge beträgt in Metallen typischerweise einige 10 nm.

## 1.5 Lichtausbreitung in optisch anisotropen Medien

### 1.5.1 Überblick



Bisher wurde in der Diskussion der Vektorcharakter der elektromagnetischen Welle vernachlässigt, da  $n$  isotrop war. Im allgemeinen hängt aber  $n$  von der Richtung des  $\vec{E}$ - Vektors ab, es ist also  $n$  eine Funktion des Polarisationszustandes.

Im folgenden breite sich die Welle (abweichend von früheren Diskussionen) in  $y$ -Richtung aus. Wie wir im Abschnitt 1.2.6 gesehen haben, lässt sich die Polarisation einer ebenen elektromagnetischen Welle wie in nebenstehender Abbildung darstellen. Hierbei definiert  $\alpha$  die Orientierung der Ellipse in der Polarisationsebene  $(x, z)$ . Die Bauchigkeit der Ellipse repräsentiert den Phasenwinkel  $\Delta\varphi$  zwischen  $E_x$  und  $E_z$ . Es gilt also:

$$E_x = E_{x0}e^{i(k_y y - \omega t)}, \quad (1.5.1)$$

$$E_z = E_{z0}e^{i(k_y y - \omega t)}. \quad (1.5.2)$$

Außerdem gilt

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{z0}E_{x0} \cos(\Delta\varphi)}{E_{x0}^2 - E_{z0}^2}. \quad (1.5.3)$$

Die vier Parameter  $E_{x0}$ ,  $E_{z0}$ ,  $\alpha$  und  $\Delta\varphi$  beschreiben den Polarisationszustand vollständig.

#### **Bemerkung:**

Im isotropen Medium wird  $k \rightarrow nk$ , es ändert sich nichts am Polarisationszustand beim Durchgang durch das Medium. Es kann aber  $\Re(n)$  anisotrop sein, dann kann gelten

1.  $n_x = n_y \neq n_z \Rightarrow$  uniaxiale Doppelbrechung
2.  $n_x \neq n_y \neq n_z \Rightarrow$  biaxiale Doppelbrechung
3.  $n_{\text{rechts}} \neq n_{\text{links}} \Rightarrow$  zirkulare Doppelbrechung, optische Aktivität.

Auch  $\Im(n) \hat{=} \kappa$  kann anisotrop sein, d.h. es kommt zu anisotroper Absorption. Hierbei kann gelten:

1.  $\kappa_x = \kappa_y \neq \kappa_z \Rightarrow$  linearer Dichroismus
2.  $\kappa_x \neq \kappa_y \neq \kappa_z \Rightarrow$  biaxialer Dichroismus

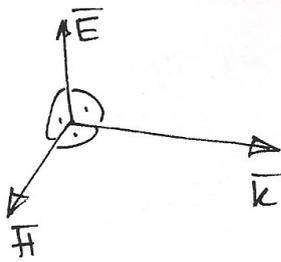
3.  $\kappa_{\text{rechts}} = \kappa_{\text{links}} \Rightarrow$  zirkularer Dichroismus

**Bemerkung:**

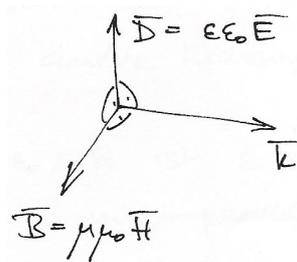
In all diesen Fällen ändert sich der Polarisationszustand der elektromagnetischen Welle beim Durchgang (bis auf Spezialfälle!).

**1.5.2 Brechungsindexellipsoid**

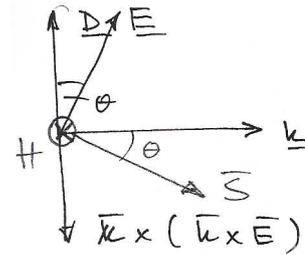
Zunächst überlegen wir uns, wie die elektromagnetische Welle aussieht. Wir starten mit unseren Überle-



**Abbildung 1.14:** Bestandteile der em. Welle im Vakuum.



**Abbildung 1.15:** Bestandteile der em. Welle im isotropen Medium.



**Abbildung 1.16:** Bestandteile der em. Welle im optisch anisotropen Medium ohne Ladung.

gungen bei den Maxwell-Gleichungen für elektromagnetische Wellen (im  $k$ -Raum).

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k} \tag{1.5.4}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{k} \tag{1.5.5}$$

$$i\vec{k} \times \vec{H} = -i\omega\vec{D} \tag{1.5.6}$$

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\vec{B} \tag{1.5.7}$$

Für  $\mu = 1$  folgt

$$\mu_0\vec{H} = \vec{B} \Rightarrow \vec{H} \parallel \vec{B}.$$

Aus (1.5.7) folgt

$$\begin{aligned} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) &= \mu_0\omega\vec{k} \times \vec{H} \\ &\stackrel{(1.5.6)}{=} -\mu_0\omega^2\vec{D} \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

Es gilt hierbei

$$|\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E})| = k^2 E \cos(\vartheta) = \mu_0\omega^2 D. \tag{1.5.9}$$

Im Allgemeinen ist  $\vartheta \neq 0$ , damit die obige Gleichheit erfüllt ist. Man hat die Phasengeschwindigkeit  $v = \frac{\omega}{k}$  und somit  $v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E \cos(\vartheta)}{\mu_0 D}$ . Mit  $\vec{B} \perp \vec{k}$  und  $\vec{B} \parallel \vec{H}$  folgt die in Abbildung 1.16 eingezeichnete Orientierung von  $\vec{H}$ . Somit ist der Poyntingvektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  gegenüber  $\vec{k}$  um den Winkel  $\varphi$  gekippt, also im allgemeinen nicht mehr parallel zur Ausbreitungsrichtung. Die Energie der Welle fließt also in eine andere Richtung als  $\vec{k}$ !

In der Beziehung  $\vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E}$  ist  $\epsilon$  also jetzt ein Tensor  $\epsilon = \hat{\epsilon}$ , (da  $\vec{D}$  nicht parallel zu  $\vec{E}$ ). Wir betrachten also jetzt den Dielektrischen Tensor

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \tag{1.5.10}$$

welcher diagonalisiert werden kann zu

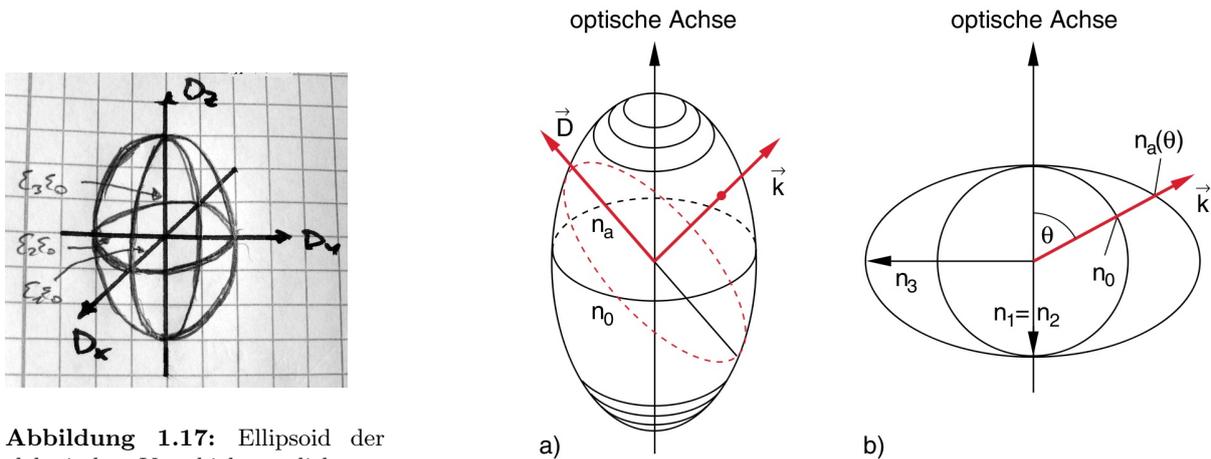
$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \hat{\epsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.5.11}$$

Gilt  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ , so ist er biaxial, und bei  $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$  bzw.  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 = \epsilon_3$  bzw.  $\epsilon_1 = \epsilon_3 \neq \epsilon_2$  uniaxial.

Aus der Forderung, dass die Energiedichte der Welle im Medium konstant sein soll, d.h.  $\vec{E} \cdot \vec{D} = \text{konst.} \equiv 1$  folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \vec{D} \cdot \hat{\epsilon}^{-1} \cdot \vec{D} &= \epsilon_0 \\ \text{oder} \quad \vec{D} \cdot \epsilon_0^{-1/2} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3^{-1} \end{pmatrix} \cdot \vec{D} \cdot \epsilon_0^{-1/2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{D_x^2 \epsilon_0^{-1}}{\epsilon_1} + \frac{D_y^2 \epsilon_0^{-1}}{\epsilon_2} + \frac{D_z^2 \epsilon_0^{-1}}{\epsilon_3} &= 1. \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Wir haben also eine Ellipsoidengleichung für  $D$  erhalten. Die Axenlängen dieses Ellipsoids (cf. Abbildung 1.17) sind  $\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0}, \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_0}$  und  $\sqrt{\epsilon_3 \epsilon_0}$ , d.h.  $n_1, n_2$  und  $n_3$ . Der Brechungsindex eines biaxial optisch anisotropen Mediums hat die Form eines Ellipsoids mit den Hauptachsenwerten  $n_1, n_2$  und  $n_3$ . Nun gilt



**Abbildung 1.17:** Ellipsoid der elektrischen Verschiebungsdichte

**Abbildung 1.18:** a) Brechungsindexellipsoid, b) Schnitt durch den Brechungsindexellipsoid

$$\begin{aligned}
 \text{res } v^2 &= \frac{c^2}{n^2} \stackrel{\text{wie oben}}{=} \frac{E \cos(\vartheta)}{\mu_0 D} = \frac{ED \cos(\vartheta)}{\mu_0 D^2} \stackrel{\vec{E} \cdot \vec{D} = 1}{=} \frac{1}{\mu_0 D^2} \\
 \Rightarrow n &= c_0 \sqrt{\mu_0 D} = \frac{D}{\sqrt{\varepsilon_0}} \\
 \Rightarrow \frac{n_x^2}{\varepsilon_1} + \frac{n_y^2}{\varepsilon_1} + \frac{n_z^2}{\varepsilon_1} &= \boxed{1 = \frac{n_x^2}{n_1} + \frac{n_y^2}{n_2} + \frac{n_z^2}{n_3}}. \tag{1.5.13}
 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass auch der Brechungsindex ein Ellipsoid ist. Dieser Ellipsoid ist in Abbildung 1.18 veranschaulicht.

### 1.5.3 Lichtausbreitung in uniaxialen Kristallen $n_1 = n_2 \neq n_3$

Das Brechungsindexellipsoid ist rotationssymmetrisch um die „3“-Achse, auch *optische Achse* genannt (cf. Abbildung 1.18, a)).

Ein typisches Beispiel für einen uniaxialen Kristall ist Kalkspat ( $\text{CaCO}_3$ ). (Zur Kristallstruktur und der Lage der optischen Achse, sehe Abbildung 1.19 und 1.20.) Wegen der dreizähligen Symmetrie ist  $n$  in der Ebene, welche parallel zur optischen Achse liegt, isotrop. Wir betrachten den windschief orientierten

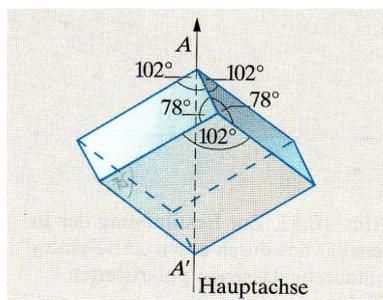


Abbildung 1.19: Struktur des Kalkspat-Kristalls.

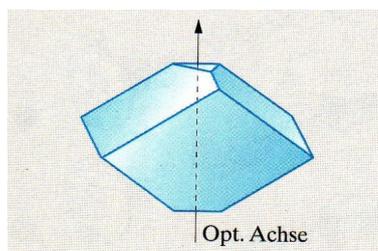
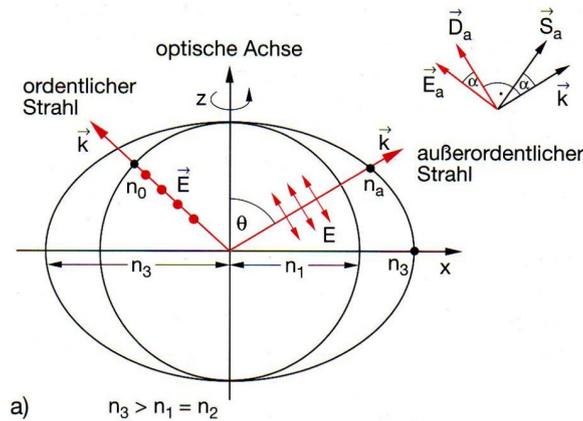


Abbildung 1.20: Verlauf der optischen Achse beim Kalkspatkristall.

$k$ -Vektor in Abbildung 1.18, a). Wegen  $\vec{D} \perp \vec{k}$  liegen die Spitzen von  $\vec{D}$  auf der rot gestrichelten Ellipse. Für Polarisation in der  $x$ - $y$ -Ebene (d.h. an den Schnittpunkten der rot gestrichelten Ellipse mit  $(x,y)$ ) ist  $n$  minimal  $n = n_0$ , sonst ist  $n$  größer, maximal  $n_a$ !

#### Spezialfälle:

- $\vec{k} \parallel z$ -Achse:  $n = n_0$  für alle Polarisationsrichtungen  $\vec{D}$ . Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  ist also unabhängig von der Polarisationsrichtung. Außerdem gilt  $\vec{E} \parallel \vec{D}$ .
- $\vec{k} \perp z$ -Achse: Ist die Polarisationsrichtung  $\vec{D} \parallel \vec{z}$ , so ist  $n = n_3$  maximal und  $c$  minimal. Ist die Polarisationsrichtung  $\vec{D} \perp \vec{z}$ , so ist  $n = n_0 = n_1$  und  $c$  maximal für alle  $\vec{k}$ -Richtungen.
- Für  $\vec{D}$  in der  $x$ - $y$ -Ebene ( $\vec{D} = (D_x, D_y, 0)$ ) gilt, dass  $n = n_0 = n_1$  *unabhängig* von der Richtung von  $\vec{k}$  ist. Die Spitzen von  $\vec{k}$  liegen auf einer Kugeloberfläche (cf. Abbildung 1.21)) mit Radius  $|\vec{k}| = n_0 |\vec{k}_0|$ . Alle diese Strahlen heißen „*ordentlicher*“ *Strahl* und sind also definiert durch eine senkrechte Polarisation zur optischen Achse (3) bzw. ( $z$ ).

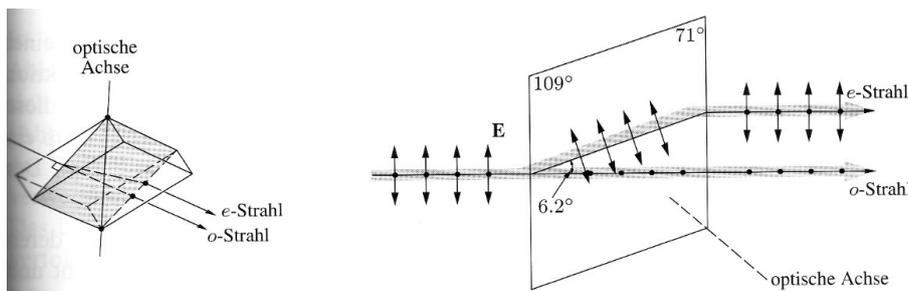


**Abbildung 1.21:** Schnitt durch den Brechungsindexellipsoid. Man sieht, wie verschieden polarisiertes Licht gebrochen wird.

- Gibt es eine Komponente der Polarisation  $\parallel z$ , ( $D_z \neq 0$ ), dann ist  $n = n_a \neq n_0$ , dies ist der „außerordentliche“ Strahl. Für  $\vec{k}$  in der  $x$ - $y$ -Ebene ist  $\vec{D} = (0, 0, D_z)$  und daher  $n_a = n_3$ .  $|\vec{k}| = n_a \cdot |\vec{k}_0|$  ist maximal. Insgesamt liegen jetzt die Spitzen von  $\vec{k}$  auf einer Ellipse (cf. Abbildung 1.21).  
 $\Rightarrow$  Ordentlicher und außerordentlicher Strahl laufen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit.  
 $\Rightarrow$  Wegen des Snellius'schen Brechungsgesetzes

$$\frac{\sin(\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

(cf. nächstes Kapitel), werden der ordentliche und der außerordentliche Strahl unterschiedlich stark gebrochen. Siehe hierzu Abbildung 1.22. Daher kommt der Begriff „Doppelbrechung“.



**Abbildung 1.22:** Ein Lichtstrahl mit zwei orthogonalen Feldkomponenten beim Durchlaufen eines Hauptschnittes eines Kalkspatkristalls.

Im nächsten Abschnitt werden einige Anwendungen der Doppelbrechung präsentiert werden.

### 1.5.4 Anwendungen der Doppelbrechung

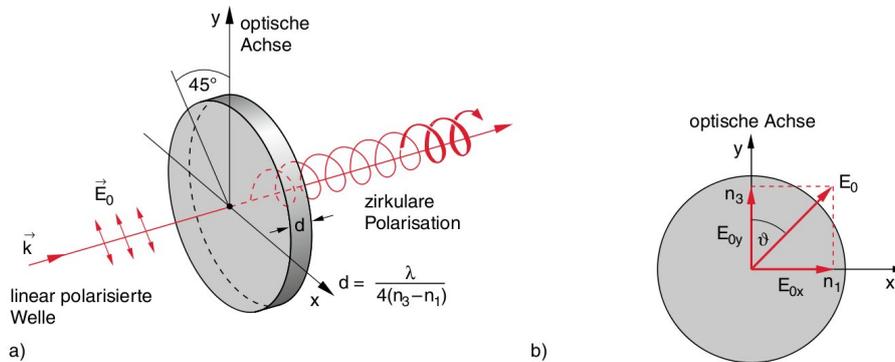
Verschiedene Anwendungen zur Erzeugung von polarisiertem Licht werden in den Übungen besprochen (Polarisatoren, photoelastischer Modulator, ...). Hier wird aber dennoch auf einige Geräte eingegangen.

#### 1.5.4.1 Phasenschiebeplatte zur Erzeugung elliptisch polarisierten Lichtes

Mit doppelbrechenden Kristallen lässt sich aus linear polarisiertem einfallenden Licht elliptisch bzw. zirkular polarisiertes transmittiertes Licht erzeugen. Dazu dreht man den Kristall, der in Form einer dünnen, planparallelen Platte mit der optischen Achse in der Plattenebene geschnitten ist, so, dass die optische Achse um  $45^\circ$  gegen die Polarisationsrichtung  $\vec{E}$  der einfallenden Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{mit} \quad \vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, 0)$$

geneigt ist (cf. Abbildung 1.23, a)). Die beiden zueinander senkrecht polarisierten Anteile der Welle mit



**Abbildung 1.23:** Mit einem  $\lambda/4$ -Plättchen kann man aus linear polarisiertem Licht zirkular polarisiertes machen. a) Anschauliche Darstellung; b) Richtung des  $\vec{E}$ -Vektors der einfallenden Welle.

$E_{0x}$  und  $E_{0y}$  erfahren unterschiedliche Brechungsindizes  $n_1$  bzw.  $n_3$  (cf. Abbildung 1.21) und haben daher nach Durchlaufen der Strecke  $d$  die relative Phasenverschiebung

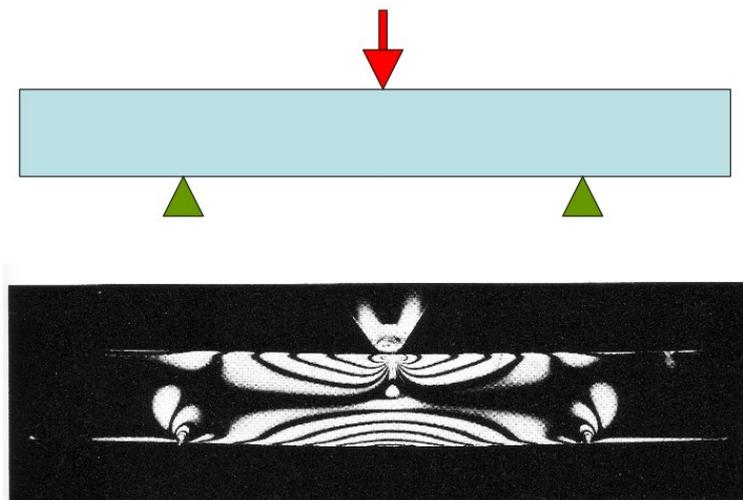
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_3 - n_1)$$

gegeneinander. Wird die Dicke  $d$  so gewählt, dass  $d(n_3 - n_1) = \lambda_0/4$  wird, also  $\Delta\varphi = \pi/2$ , so ist die austretende Welle für  $\alpha = 45^\circ$  ( $E_x = E_y$ ) zirkular polarisiert ( $\lambda/4$ -Plättchen) für andere Winkel  $\alpha$  ( $E_x \neq E_y$ ) ist sie elliptisch polarisiert.

Man sieht, dass solche  $\lambda/4$ -Plättchen im Allgemeinen sehr dünn und deshalb mechanisch fragil sind. Um dies zu vermeiden, kann man entweder  $\Delta n$  sehr klein wählen, oder man betreibt die  $\lambda/4$ - Zirkularpolarisatoren in höherer Ordnung, d. h. man macht die Dicke so groß, dass  $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi/2$  mit  $m \gg 1$  gilt. Der Nachteil der Verwendung höherer Ordnungen ist die stärkere Abhängigkeit der Phasenverschiebung  $\Delta\varphi(\lambda)$  von der Wellenlänge  $\lambda$ .

### 1.5.4.2 Spannungsdoppelbrechung

Durch Verbiegen eines Materials werden interne Verspannungen, d.h. Deformationen erzeugt. Diese äußern sich in einer Doppelbrechung, die die Richtung der Hauptachse des Verzerrungssystems und die Größen der Verzerrungen widerspiegeln. Man kann also an den Aufhellungen zwischen gekreuzten Polarisatoren Verspannungen sichtbar machen und vermessen (cf. Abbildung 1.24).



**Abbildung 1.24:** Spannungsdoppelbrechung eines Balkens aus Plexiglas, der auf zwei Stützen ruht und in der Mitte belastet wird, sichtbar gemacht mit Hilfe der Polarimetrie.

### 1.5.4.3 Elektrooptischer Kerr-Effekt

Abbildung 1.25 zeigt den hier betrachteten Versuchsaufbau. Licht dringt durch zwei gekreuzte Polarisatoren (um  $\pm 45^\circ$  gedreht), zwischen denen sich ein durchsichtiger Behälter mit Flüssigkeit befindet. Senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes wird ein externes  $\vec{E}$ -Feld angelegt. Das  $\vec{E}$ -Feld erzeugt ein Dipolmoment  $\vec{P}$  in den Molekülen, die sich zur Minimierung der elektrischen Energie ( $\vec{P} \cdot \vec{E}$ ) parallel zu  $\vec{E}$  ausrichten. Da die Moleküle selbst optisch anisotrop sind, entsteht eine makroskopische Doppelbrechung, die wie bei der Phasenschieberplatte gemessen werden kann. Die Phasenverschiebung ist

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{d}{\lambda_0} \cdot K \cdot E^2, \quad (1.5.14)$$

wobei  $K$  die Kerr-Konstante ist und  $d$  die Länge der Zelle. Tabelle 1.1 zeigt einige typische Kerr-Konstanten.

### 1.5.4.4 Optische Aktivität

Gewisse Medien, wie etwa Quarz oder eine Zuckerlösung drehen die lineare Polarisation. Man sagt, sie sind optisch aktiv. Der Rotationswinkel ist

$$\alpha = \alpha_s \cdot c \cdot d, \quad (1.5.15)$$

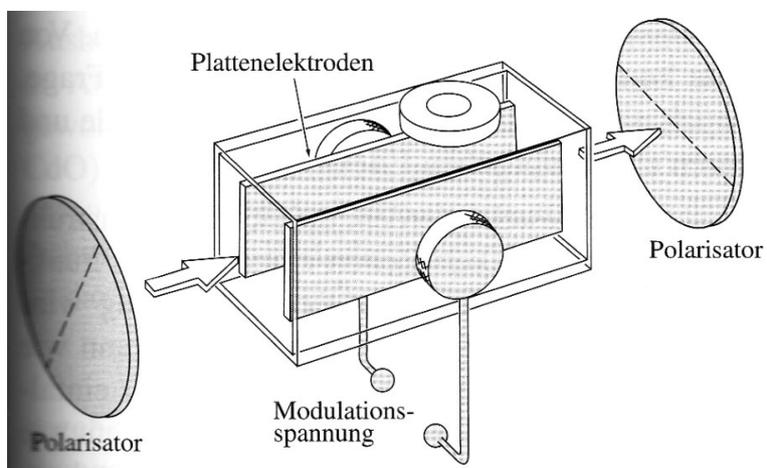
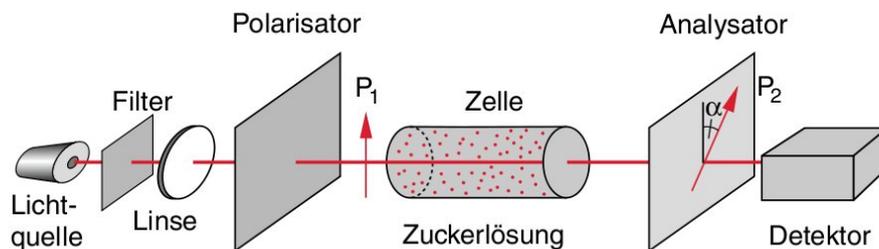


Abbildung 1.25: Kerr-Zelle.

Substanz		$K$ (in $10^{-7}\text{cm}(\text{st. Volt})^{-2}$ )
Benzol	$\text{C}_6\text{H}_6$	0,6
Schwefelkohlenstoff	$\text{CS}_2$	3,2
Chloroform	$\text{CHCl}_3$	-3,5
Wasser	$\text{H}_2\text{O}$	4,7
Nitrotoluol	$\text{C}_5\text{H}_7\text{NO}_2$	123
Nitrobenzol	$\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$	220

Tabelle 1.1: Kerr-Konstanten einiger wichtiger Materialien.

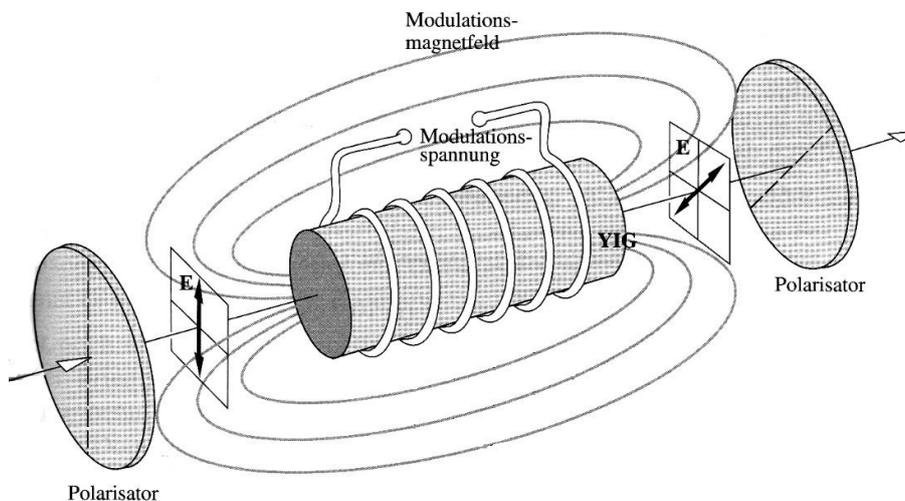
wobei  $\alpha_s$  das spezielle optische Drehvermögen, also eine Materialkonstante, ist und  $c$  die Konzentration der aktiven Moleküle. Vergleiche hierzu auch Abbildung 1.26.



**Abbildung 1.26:** Eine Zuckerlösung vermag die Polarisations Ebene von Licht zu drehen. Solche Medien nennt man optisch aktiv.

### 1.5.4.5 Faraday-Rotation

In ähnlicher Weise kann durch ein tangenciales externes  $\vec{B}$ -Feld ( $\vec{k} \parallel \vec{B}$ ) eine Drehung der linearen Polarisation erzeugt werden. Vergleiche hierzu Abbildung 1.27. Der Rotationswinkel berechnet sich zu



**Abbildung 1.27:** Ein Modulator, der mit Faraday-Effekt arbeitet.

$$\alpha = V_e \cdot d \cdot \vec{B} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \tag{1.5.16}$$

mit  $d =$  Länge des magnetisierten Stabes im  $\vec{B}$ -Feld und der Verdet-Konstante  $V_e$ . Für einige wichtige Stoffe ist die Verdet-Konstante in Tabelle 1.2 aufgeführt. *Achtung:* Im Gegensatz zur optischen Aktivität

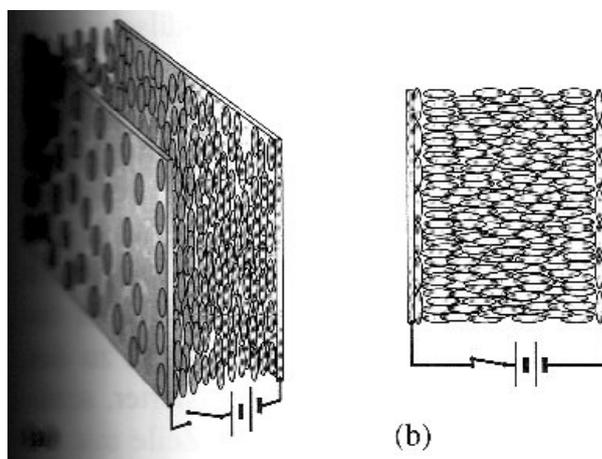
Substanz	Temperatur (in ° C)	$V$ (in Bogenminuten Gauss $^{-1}$ cm $^{-1}$ )
Leichtflintglas	18	0,0317
Wasser	20	0,0131
NaCl	16	0,0359
Quarz	20	0,0166
NH <sub>4</sub> Fe(SO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> · 12H <sub>2</sub> O	26	-0,00058
Luft*	0	$6,27 \cdot 10^{-6}$
CO <sub>2</sub> *	0	$9,39 \cdot 10^{-6}$

**Tabelle 1.2:** Verdet-Konstanten einiger wichtiger Materialien. (\*  $\lambda = 578\text{nm}, 1013\text{hPa}$ )

dreht sich der Drehsinn der Rotation der Polarisation bezüglich der Ausbreitungsrichtung bei deren Umkehr um, da  $\vec{k}$  und  $\vec{B}$  Vektoren sind und das Produkt  $\vec{k} \cdot \vec{B}$  sein Vorzeichen ändert bei  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ .

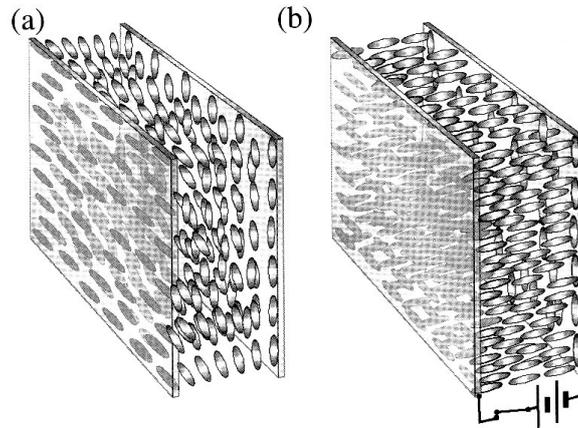
#### 1.5.4.6 Flüssigkristall-Anzeigen

Flüssigkristalle bestehen aus stäbchenförmigen Molekülen, die sich in einem bestimmten Temperaturbereich parallel zueinander ausrichten, aber in einer flüssigen Phase bleiben. Die Moleküle richten sich bereits in kleinen  $\vec{E}$ -Feldern stark aus, erzeugen also eine große Doppelbrechung (cf. Abbildung 1.28). Man kann auch die Moleküle ohne  $\vec{E}$ -Feld durch Wandbehandlung in eine schraubenförmig orientierte



**Abbildung 1.28:** a) Nematischer Flüssigkristall zwischen zwei transparenten Elektroden. Die länglichen Moleküle richten sich parallel zum Mikrorillenmuster auf der Innenfläche der beschichteten Glaswände (Elektroden) aus. b) Liegt eine Spannung an, so drehen sich die Moleküle in Feldrichtung.

Struktur zwingen (cf. Abbildung 1.29). Diese dreht dann die lineare Polarisation wie bei der optischen Aktivität. Durch Ausrichten der Moleküle entlang  $\vec{k}$  durch ein äußeres Feld kann diese Drehung zunichte



**Abbildung 1.29:** a) Verdrillte nematische Zelle. Die Moleküle des Flüssigkristalls richten sich am linken Fenster waagrecht, am rechten Fenster senkrecht aus, dazwischen sind die Schichten schrittweise gegeneinander verdreht. b) Liegt an der Zelle eine Spannung an, so drehen sich die Moleküle in Feldrichtung.

gemacht werden. Dies kann zum Schalten der optischen Transmission zwischen gekreuzten Polarisatoren (cf. Abbildung 1.30) benutzt werden. Auf diese Weise werden die Pixel in Flachbildschirmen hell-dunkel geschaltet.

## 1.6 Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen

In den bisherigen Abschnitten wurde das Verhalten von elektromagnetischen Wellen in unendlich ausgedehnten Medien diskutiert. Nun soll der Übergang elektromagnetischer Wellen zwischen Materialien mit unterschiedlichen Material-Parametern betrachtet werden.

### 1.6.1 Wiederholung: Feldverhalten an Grenzflächen

Die Maxwell-Gleichungen gelten für Bereiche, in denen die Materialparameter  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  etc. stetig sind. Im Folgenden wollen wir uns mit den Grenzflächen zwischen zwei Materialien befassen und dort das Feldverhalten verstehen. Material 1 und 2 seien beschrieben durch unterschiedliche Materialgleichungen. Eine Grenzfläche wird durch Grenzsicht mit Dicke  $\delta h$ , wo  $\mu$ ,  $\sigma$ , ... stetig sind, genähert.

**Annahme:** Für  $\delta h \rightarrow 0$  bleiben die Felder und ihre zeitliche Ableitung endlich. Die Grenzflächen liegen bei den folgenden Betrachtungen immer bei  $z = 0$ .

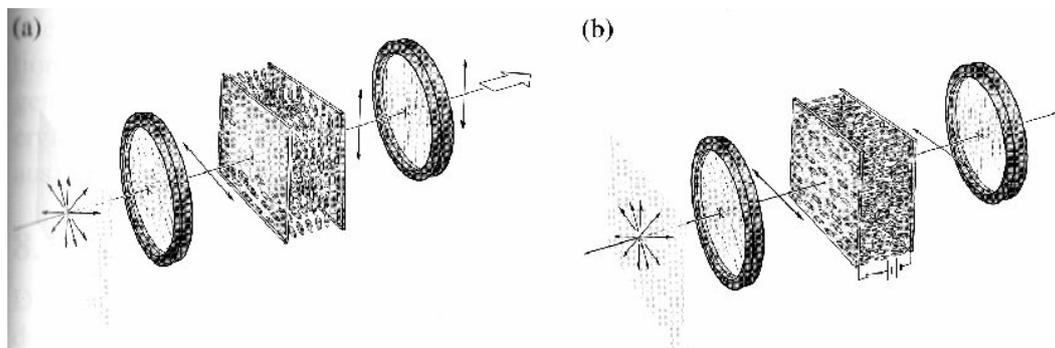
- **1. Maxwell-Gleichung:**

$$\nabla \cdot \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}) = \vec{0} \quad (1.6.1)$$

Hierbei ist  $\vec{B}^{(2)} := \vec{B}(z \searrow 0, x, y)$  und  $\vec{B}^{(1)} = \vec{B}(z \nearrow 0, x, y)$ . Die Normalkomponente von  $\vec{B}$  ist immer stetig

- **2. Maxwell-Gleichung:**

$$\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{0} \Rightarrow \hat{n} \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) = \vec{0} \quad (1.6.2)$$



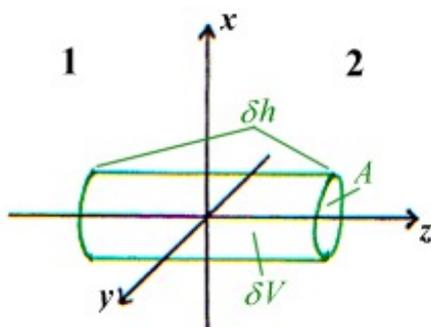
**Abbildung 1.30:** a) Verdrillte nematische Zelle zwischen zwei gekreuzten Polarisatoren. Senkrecht polarisiertes Licht verlässt die Anordnung. b) Liegt an der Zelle eine Spannung an, so wird die PolarisationsEbene nicht mehr gedreht; waagrecht polarisiertes Licht tritt in die Zelle ein und aus ihr aus. Anschließend wird es vom zweiten Polarisationsfilter vollständig absorbiert, kein Licht verlässt die Anordnung.

Die Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  sind immer stetig.

• **3. Maxwell-Gleichung:**

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho^{\text{ext}} \Rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}) = \rho_F \tag{1.6.3}$$

Die Normalkomponente  $\vec{D}$  ist stetig, oder falls dies keine Lösung der Maxwell-Gleichungen und der Materialgleichungen erlaubt, springt sie um eine Oberflächenladung  $\rho_F = \lim_{\delta h \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{dV} d^3r \rho_{\text{ext}}$ . Die diskutierte Situation wird in Abbildung 1.31 noch veranschaulicht.

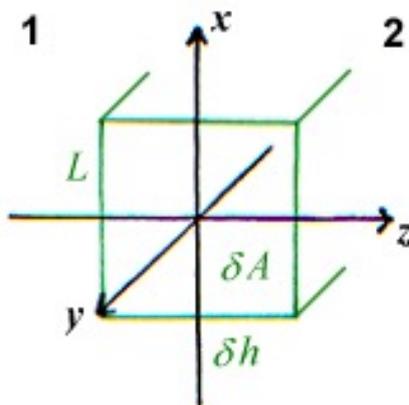


**Abbildung 1.31:** Gedachtes infinitesimales Volumen  $\delta V$  an der Grenzfläche zwischen Medium 1 und 2 zur Bestimmung der Stetigkeitsbedingungen von  $\vec{D}$ .

• **4. Maxwell-Gleichung:**

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}^{\text{ext}} + \dot{\vec{D}} \Rightarrow \hat{n} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) = \vec{j}_F \tag{1.6.4}$$

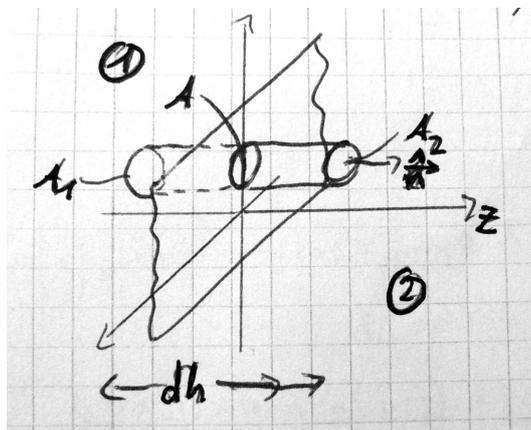
Die Tangentialkomponente von  $\vec{H}$  ist stetig, oder falls dies keine Lösung der Maxwell-Gleichungen und Materialgleichungen erlaubt, springt sie um den Oberflächenstrom  $\vec{j}_F = \lim_{\delta h \rightarrow 0} \frac{1}{L} \int_{dA} d\vec{\sigma} \cdot \vec{j}$ . Die diskutierte Situation wird in Abbildung 1.32 noch veranschaulicht.



**Abbildung 1.32:** Gedachte infinitesimale Fläche  $\delta A$  senkrecht zur Grenzfläche zwischen Medium 1 und 2 zur Bestimmung der Stetigkeitsbedingungen von  $\vec{H}$ .

## 1.6.2 Energiefluss durch eine Grenzfläche

### 1.6.2.1 Verhalten des Poyntingvektors $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$



**Abbildung 1.33:** Energiefluss durch eine Grenzfläche.

Wir betrachten den in Abbildung 1.33 dargestellten Zylinder mit infinitesimalen Volumen  $\delta V$  an der

Grenzfläche (siehe auch Abbildung 1.31). Es gilt im Zylinder Energieerhaltung und somit

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int_{\delta V} d^3r (\partial_t u + \vec{j}^{\text{ext}} \cdot \vec{E})}_{\text{Energieänderung}} &= \underbrace{- \oint_{\partial \delta V} d\vec{\sigma} \cdot \vec{S}}_{\text{Energiefluss durch geschl. Oberfl.}} \\
 &= - \int_{\text{Mantel}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{S} - \int_{A_1} d\sigma (-\hat{n}) \cdot \vec{S} - \int_{A_2} d\sigma \hat{n} \cdot \vec{S} \\
 &\xrightarrow{\delta h \rightarrow 0} \int_A d\sigma \hat{n} \cdot (\vec{S}^{(1)} - \vec{S}^{(2)})
 \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Nun treffen wir die folgenden Annahmen.

- $\dot{u}$  ist endlich  $\Rightarrow \int_{dV} d^3\dot{u} \xrightarrow{\delta h \rightarrow 0} 0$ .
- $\vec{S}$  ist endlich  $\Rightarrow \int_{\text{Mantel}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{S} \xrightarrow{\delta h \rightarrow 0} 0$ .
- Für die Oberflächenstromdichte entlang der Oberfläche gilt

$$\int_{dV} d^3r \vec{j}^{\text{ext}} \cdot \vec{E} \xrightarrow{\delta h \rightarrow 0} \vec{E}^{\parallel} \int_A d\vec{\sigma} \cdot \vec{j}^{\text{ext}}.$$

Da  $A$  beliebig ist, folgt

$$\hat{n}(\vec{S}^{(2)} - \vec{S}^{(1)}) = -\vec{j}_F \cdot \vec{E}^{\parallel}.$$

Die Normalkomponente von  $\vec{S}$  ist stetig oder springt um Joule'sche Wärme des Oberflächenstroms mit  $\vec{j}_F$ .

**Bemerkung:**

Der Beweis von (1.6.1) und (1.6.3) läuft völlig analog. Der Beweis von (1.6.2) und (1.6.4) verwendet den Stokes'schen Satz.

### 1.6.2.2 Zeitlich gemittelter Energiefluss

Bei einer monochromatischen elektromagnetischen Welle gilt  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H} \propto e^{i\omega t}$ . Ist  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  die Periode der Schwingung, dann gilt für den zeitlich gemittelten Poyntingvektor

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{S} \rangle &= \frac{2}{T} = \int_0^T dt \Re(\vec{E}) \times \Re(\vec{H}) \\
 &\stackrel{\vec{B}=\vec{H}/\mu_0}{=} \frac{1}{4T\mu_0} \int_0^T dt (\vec{E} + \vec{E}^*) \times (\vec{B} + \vec{B}^*).
 \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

Da  $\vec{E} \times \vec{B} \propto e^{2i\omega t}$ ,  $\vec{E}^* \times \vec{B}^* \propto e^{-2i\omega t}$  und

$$\int_0^T dt e^{\pm 2i\omega t} = e^{\pm i\omega T} - 1 = 0$$

folgt

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \Re(\vec{E}^* \times \vec{B}), \tag{1.6.7}$$

wenn  $\vec{E}, \vec{B} \propto e^{i\omega t}$ . Für transversale monochromatische Welle mit  $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$  und  $\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0$  folgt

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} |\vec{E}|^2 \Re \left( \frac{\vec{k}}{\omega} \right). \tag{1.6.8}$$

### 1.6.3 Brechungs- und Reflexionsgesetze

Wir betrachten eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien 1 und 2, sowie eine einfallende elektromagnetische Welle, (welche im folgenden mit  $I$  für engl. „incoming“ indiziert werden wird). Es gehört also zur einfallenden Welle  $\vec{E}_I$  die Phase  $\varphi_I$ , zur reflektierten Welle  $\vec{E}_R$  die Phase  $\varphi_R$  und zur transmittierten Welle  $\vec{E}_T$  die Phase  $\varphi_T$ . Die Indizes werden auch in Abbildung 1.34 eingeführt.

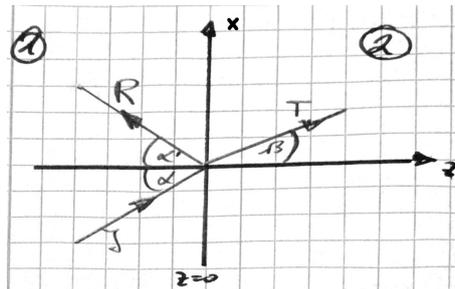


Abbildung 1.34: Einfallende, reflektierte und transmittierte em. Welle.

Das Material 1 (bei  $z < 0$ ) sei o.B.d.A. ein ideales Dielektrikum. Die Felder in 1 und 2 müssen die Maxwell-Gleichungen und die Materialgleichungen lösen, sowie die in Abschnitt 1.6.1 diskutierten Stetigkeitsbedingungen erfüllen. Zur Vereinfachung betrachten wir eine ebene monochromatische Welle mit  $\varphi_i = \omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}$ , ( $i \in \{I, R, T\}$ ).

#### 1.6.3.1 Kinematische Einschränkungen

Wegen der Stetigkeitsbedingungen müssen die Phasen an der Grenzfläche, also bei  $z = 0$  gleich sein. (Wir schreiben also etwaige Konstanten in den  $E$ -Polarisations-Vektoren auf.)

$$\omega_I t - \vec{k}_I \cdot \vec{r} \Big|_{z=0} \stackrel{!}{=} \omega_R t - \vec{k}_R \cdot \vec{r} \Big|_{z=0} \stackrel{!}{=} \omega_T t - \vec{k}_T \cdot \vec{r}_T \tag{1.6.9}$$

Die Gleichung (1.6.9) sind nur erfüllbar für alle  $t$ , wenn das reflektierte und transmittierte Licht „die selbe Farbe hat“, also  $\omega_I = \omega_R = \omega_T$  gilt. Wir sehen also, dass die Dispersionsrelationen  $\omega = \omega(k)$  in Material 1 und 2 zur Definition von Brechungsindizes  $n_i(\omega)$  verwendet werden können:

$$k_i(\omega) = \frac{\omega}{c} n_i(\omega), \tag{1.6.10}$$

wobei für Medium 1  $i \in \{I, R\}$  und für Medium 2  $i = T$ .

#### (A) Reflexion

Die Gleichung (1.6.9) ist nur erfüllt für alle  $\vec{r}|_{z=0} = (x, y, z = 0)^T = \vec{r}^{\parallel}$ , also

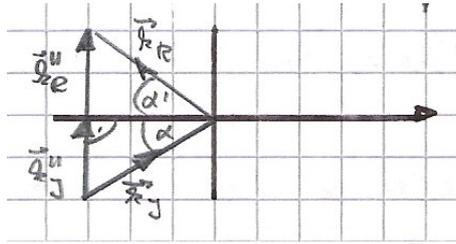


Abbildung 1.35: Einfallende und reflektierte em. Welle.

$$\vec{k}_I \cdot \vec{r}_I^{\parallel} = k_{Ix}x + k_{Iy}y = \vec{k}_R \cdot \vec{r}^{\parallel},$$

wenn gilt

$$k_I^{\parallel} \stackrel{!}{=} k_R^{\parallel}.$$

Die Tangentialkomponenten von  $\vec{k}_I$  und  $\vec{k}_R$  müssen also gleich sein. Daraus kann man Aussagen über den Einfallswinkel  $\alpha$  der Welle und ihren Ausfallswinkel  $\alpha'$  treffen. Es gilt

$$\begin{aligned} |\vec{k}_I^{\parallel}| &= |\vec{k}_I| \cdot \sin(\alpha) = \frac{\omega}{c} n \cdot \sin(\alpha) \\ |\vec{k}_R^{\parallel}| &= |\vec{k}_R| \cdot \sin(\alpha') = \frac{\omega}{c} n \cdot \sin(\alpha'), \end{aligned}$$

und somit folgt sofort  $\alpha = \alpha'$ , bei der Reflexion gilt also „Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“.

(B) **Brechung**

Analog zum oberen Fall ist (1.6.9) nur erfüllt für alle  $\vec{r}|_{z=0}$ , falls  $\vec{k}_I^{\parallel} = \vec{k}_T^{\parallel}$ . Hierbei gilt für den

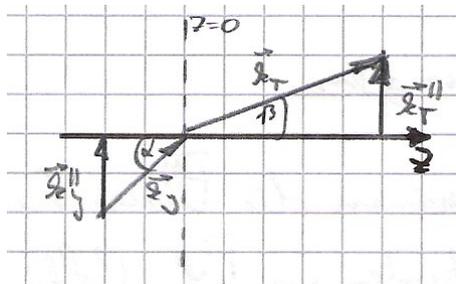


Abbildung 1.36: Einfallende und transmittierte em. Welle.

Winkel  $|\vec{k}_T^{\parallel}| = |\vec{k}_T| \sin(\beta)$ . Wenn (zur Vereinfachung) das Medium 2 ein ideales Dielektrikum ist, d.h.  $|\vec{k}_T| = \frac{\omega}{c} n_2$ , dann folgt das Brechungsgesetz nach Snellius

$$\begin{aligned} n_1 \sin(\alpha) &= n_2 \sin(\beta) & (1.6.11) \\ \Leftrightarrow \sin(\alpha) &= n \sin(\beta) \quad (\text{mit } n = \frac{n_2}{n_1}). \end{aligned}$$

Für  $n > 1$  ist  $\beta < \alpha$ , es findet also eine Brechung zum Lot hin statt, für  $n < 1$  gilt  $\beta > \alpha$ , die Welle wird also vom Lot weg gebrochen.

### 1.6.3.2 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

In diesem Unterabschnitt wird es um die Frage gehen, wie viel von der einfallenden elektromagnetischen Welle durch eine Grenzfläche hindurch geht und wie viel zurück kommt.

(A) Zunächst betrachten wir den Sachverhalt allgemein bei (zur Vereinfachung) senkrechtem Einfall ( $\Rightarrow \alpha = 0$ ) der Welle. Es folgt  $\beta = 0$  und  $\vec{k}_i^{\parallel} = 0$ .

Sei im folgenden  $\hat{n} = \hat{e}_z$ . Die Dispersionsrelation liefert

$$\begin{aligned} \text{in Medium 1:} \quad \vec{k}_I &= k_I \hat{n} = \frac{\omega}{c} n_1 \hat{n} = k_1 \hat{n} \\ \vec{k}_R &= -k_R \hat{n} = -\frac{\omega}{c} n_1 \hat{n} = -k_1 \hat{n}, \\ \text{in Medium 2:} \quad \vec{k}_T &= k_T \hat{n} = \frac{\omega}{c} n_2(\omega) \hat{n} = k_2(\omega) \hat{n}. \end{aligned}$$

Wir verwenden den Ansatz transversaler ebener monochromatischer Wellen.

(1)  $z < 0$ :

$$\vec{E}(z, t) = e^{i\omega t} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} E_{Ix} \\ E_{Iy} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_1 z}}_{\substack{\text{nach rechts laufende Welle} \\ \text{cf. d'Alambert in 1.2.2}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} E_{Rx} \\ E_{Ry} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1 z}}_{\text{nach links laufende Welle}} \right) \quad (1.6.12)$$

Wir haben also eine Superposition von einer nach rechts laufenden und einer nach links laufenden Welle. Dies erfüllt die Maxwell-Gleichungen im idealen Dielektrikum 1, wenn  $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{B}(z, t) = \frac{n_1}{c} e^{i\omega t} \left( \begin{pmatrix} -E_{Iy} \\ E_{Ix} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_1 z} + \begin{pmatrix} E_{Ry} \\ -E_{Rx} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1 z} \right). \quad (1.6.13)$$

(2)  $z > 0$ :

Für die nach rechts laufende Welle läuft die Diskussion im Wesentlichen analog. Es gilt

$$\vec{E}(z, t) = e^{i\omega t} \left( \begin{pmatrix} E_{Tx} \\ E_{Ty} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_2 z} \right). \quad (1.6.14)$$

Wir haben also eine transversale Welle

$$\vec{B}(z, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k}_2 \times \vec{E} = \frac{n_2(\omega)}{c} e^{i\omega t} \left( \begin{pmatrix} -E_{Ty} \\ E_{Tx} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_2 z} \right). \quad (1.6.15)$$

Damit sind die Maxwell-Gleichungen im Medium 2 erfüllt.

Diese Ansätze sind so gewählt, dass die Stetigkeitsbedingungen bei  $z = 0$  erfüllt werden können. Dies führen wir uns nochmal kurz vor Augen.

- $\vec{D}_{\text{normal}}$  ist stetig; das liefert  $\hat{n} \cdot \vec{E}_i = 0$  für  $i \in \{I, R, T\}$ , was schon erfüllt ist.
- $\vec{B}_{\text{normal}}$  ist stetig; das liefert  $\hat{n} \cdot \vec{B}_i = 0$  für  $i \in \{I, R, T\}$ , was schon erfüllt ist.
- $\vec{E}_{\text{tangential}}$  ist stetig; das liefert  $E_I + E_R = E_T$ , jeweils in  $x$ - oder  $y$ -Richtung.
- $\vec{H}_{\text{tangential}}$  ist stetig; das liefert  $n_1(E_I - E_R) = n_2 E_T$ , jeweils in  $x$ - oder  $y$ -Richtung.

Man kann die Amplitudenfaktoren nach Auflösen beider Gleichungen

$$R = \frac{E_R}{E_I} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - n}{1 + n} \quad (1.6.16)$$

$$T = \frac{E_T}{E_I} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + n} \quad (1.6.17)$$

ableiten, (wobei wieder  $n = n_2/n_1$  ist). Hierbei ist  $R$  die Reflexionsamplitude (Achtung: man verwendet auch häufig  $r$ !) und  $T$  die Transmissionsamplitude.  $R$  und  $T$  werden in den Abbildungen 1.41 und 1.42 über dem Einfallswinkel aufgetragen dargestellt.

Nun betrachten wir noch den über die Zeit gemittelten Energiefluss  $\langle \vec{S} \rangle$  der einzelnen diskutierten Wellen. Es gilt

$$\langle \vec{S}_I \rangle = \frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} |\vec{E}_I|^2 n_1 \hat{n}, \quad (1.6.18)$$

$$\langle \vec{S}_R \rangle = -\frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \underbrace{|\vec{E}_I|^2 |R|^2}_{=|\vec{E}_R|^2} n_1 \hat{n}, \quad (1.6.19)$$

$$\langle \vec{S}_T \rangle = \frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \underbrace{|\vec{E}_I|^2 |T|^2 \Re(n_2)}_{=\Re(|\vec{E}_T|^2 n_2)} \hat{n}. \quad (1.6.20)$$

Hieraus kann man den Reflexionskoeffizienten  $r$  und den Transmissionskoeffizienten  $t$  folgern.

$$r := \frac{-\langle \vec{S}_R \cdot \hat{n} \rangle}{\langle \vec{S}_I \cdot \hat{n} \rangle} = |R|^2 \quad (1.6.21)$$

$$t := \frac{\langle \vec{S}_T \cdot \hat{n} \rangle}{\langle \vec{S}_I \cdot \hat{n} \rangle} = |T|^2 \frac{n + n^*}{2} \quad (1.6.22)$$

Anschaulich ist der Reflexionskoeffizient  $r$  der relative Anteil des Energieflusses, der reflektiert wird und entsprechend ist  $t$  der relative Anteil des Energieflusses, der durch die Grenzfläche geht. Da (ohne  $\vec{j}_F$  (cf. hierzu Abschnitt 1.6.1))  $S$  stetig ist, gilt  $\boxed{r + t = 1}$ . Vergleiche auch die Abbildungen 1.43 und 1.44, in denen  $r$  und  $t$  über dem Einfallswinkel aufgetragen veranschaulicht werden.

- (B) Anwendung: Sei Material 2 ein ideales Dielektrikum (d.h.  $n \in \mathbb{R}$ ). In der Abbildung 1.37 wird die Reflexionsamplitude, und in Abbildung 1.38 die Transmissionsamplitude, sowie der Reflexionskoeffizient und der Transmissionskoeffizient qualitativ veranschaulicht. Man sieht einen Phasensprung ( $R < 0$ ) der reflektierten Welle bei  $n > 1$ . Zahlenbeispiel: Luft-Glas:  $n \approx 1,5$ ,  $r = 4\%$ . Es liegt also eine geringe Reflexion vor.

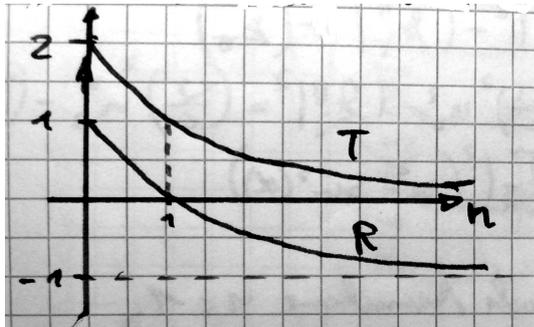


Abbildung 1.37: Reflexionsamplitude  $R$  und Transmissionsamplitude  $T$  aufgetragen über  $n$ .

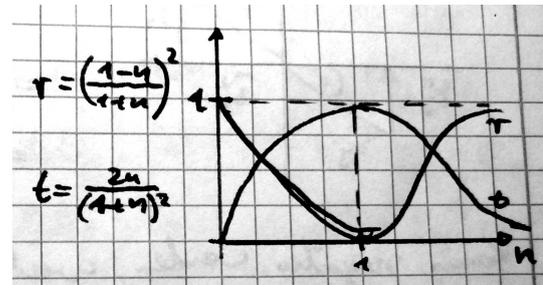


Abbildung 1.38: Reflexionskoeffizient  $r$  und Transmissionskoeffizient  $t$  aufgetragen über  $n$ .



Abbildung 1.39: Umgekehrt: Em. Welle vom dickeren ins dünnere Medium.

Für die Anwendung benötigt man oft den umgekehrten Fall. (Vergleiche Abbildung 1.39). Bei vertauschter Rolle der Materialien folgt

$$\begin{aligned} R' &= \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = -R \\ T' &= \frac{2n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_2}{n_1} T \\ \Rightarrow r' &= |R'|^2 = r \\ \Rightarrow t' &= \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \left(\frac{n_2}{n_1} T\right)^2 = t \end{aligned}$$

### 1.6.3.3 Grenzwinkel $\alpha_T$ der Totalreflexion am optisch dünnen (d.h. $n_2 < n_1$ , $n < 1$ ) Material

Die Bedingungen  $\vec{k}_I^\parallel = \vec{k}_T^\parallel$  und  $\omega_I = \omega_T$  müssen immer erfüllt sein, wobei  $\vec{k}_I = \vec{k}_I^\perp + \vec{k}_I^\parallel$  und  $\vec{k}_T = \vec{k}_T^\perp + \vec{k}_T^\parallel = k_T^\perp \hat{n} + \vec{k}_T^\parallel$ . Der senkrechte Anteil des Wellenvektors der transmittierten Welle

$$\begin{aligned} |\vec{k}_T|^2 - |\vec{k}_T^\parallel|^2 &= (\vec{k}_T^\perp)^2 \\ &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_2^2 - |k_I^\parallel|^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_2^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_1^2 \sin^2(\alpha) \\ &= |k_I^\parallel|^2 (n^2 - \sin^2(\alpha)) \end{aligned}$$

kann negativ werden, weil nach Annahme  $n < 1$ . Also gilt für  $\alpha > \alpha_T$  (mit dem Grenzwinkel  $\alpha_T : \sin(\alpha_T) = n = n_2/n_1 < 1$ ), dass  $\vec{k}_T^\perp = \vec{i} \hat{n}$  mit Eindringtiefe  $l \in \mathbb{R}$ , so dass die Felder in Material 2 exponentiell abfallen. Es gilt dann

$$E \propto e^{-ik_T^\perp z} \propto e^{-\frac{z}{l}}.$$

#### Bemerkung:

- Die mathematische Lösung  $\propto e^{z/l}$  ist unphysikalisch, weil ja sonst das Feld im Medium exponentiell anwachsen würde.
- Alle Energie wird reflektiert  $r(\alpha \geq \alpha_T) = 1, t(\alpha \geq \alpha_T) = 0$ .

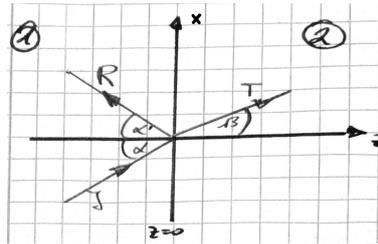
### 1.6.3.4 Fresnel'sche Formeln

Wir betrachten den Fall allgemeiner Einfallrichtung elektromagnetischer Strahlung aus Material 1 auf Material 2 (cf. Abbildung 1.40). Material 1 und 2 seien ideale Dielektrika. Es gilt also die Dispersionsrelation  $k_i = |(\vec{k}_i^\parallel + \vec{k}_i^\perp)| = \frac{\omega}{c} n$ .

Die einfallende (transversale ebene monochromatische) Welle kann als Superposition zweier linear polarisierter Wellen betrachtet werden.

(A)  $\vec{E}_I$  senkrecht zur Einfallsebene mit

$$\vec{E}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{Iy} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega t - ik_1^\parallel x - ik_1^\perp z}.$$



**Abbildung 1.40:** Licht fällt von Medium 1 in Medium 2 ein. Die so genannte Einfallsebene sei hier als  $x$ - $z$ -Ebene gewählt.

(B)  $\vec{E}_I$  in der Einfallsebene mit

$$\vec{E}_I = \begin{pmatrix} E_{Ix} \\ 0 \\ E_{Iz} \end{pmatrix} e^{i\omega t - ik_1^{\parallel} x - ik_1^{\perp} z}.$$

Hierbei gilt  $k_1^{\parallel} E_{Ix} + k_1^{\perp} E_{Iz} = 0$ , da die Welle transversal ist.

Es ist also allgemein  $\vec{E}_I = \vec{E}^{\perp} + \vec{E}^{\parallel}$  eine transversale ebene monochromatische Welle, die die Maxwell-Gleichungen erfüllt.

**Bemerkung:**

Im Fall (A) sind auch  $\vec{E}_R$  und  $\vec{E}_T$  in  $\hat{y}$ -Richtung. Im Fall (B) sind  $\vec{E}_R$  und  $\vec{E}_T$  in der Einfallsebene. Der Beweis, dass beide Fälle entkoppeln und die Rechnung für Fall (A) erfolgen in Aufgabe 10. Als Ansatz können obige  $\vec{E}$ -Felder dienen, mit welchen die Stetigkeitsbedingungen des elektrischen und magnetischen Feldes zu erfüllen sind.

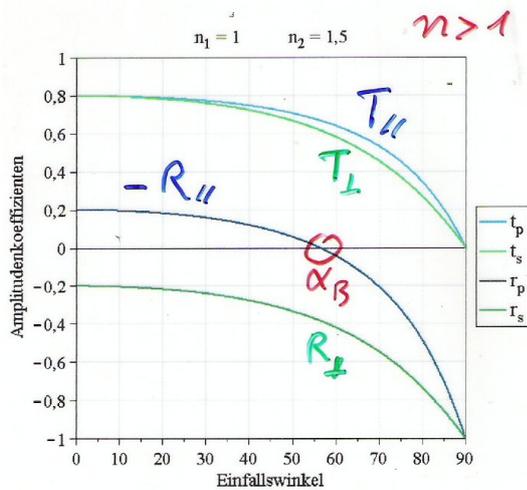
**Bemerkung:**

- Es kommt zu einem Phasensprung ( $R < 0$ ) bei Reflexion am optisch dichteren Material.
- Für  $n > 1$  und  $\alpha \rightarrow 90^\circ$  folgt  $T \rightarrow 0$ , es findet also eine vollständige Reflexion bei streifendem Einfall statt.
- Aus  $r = |R|^2$  und der Energieerhaltung folgt  $r + t = 1$ .
- Totalreflexion  $|r| = 1$  für  $n < 1$  bei  $\alpha \geq \alpha_T$ .
- $R_{\parallel} = 0$  für  $\alpha = \alpha_B$  (Brewster-Winkel). Siehe hierzu Abbildung 1.45. Wenn  $180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$ , also  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , steht  $\vec{k}_T$  senkrecht auf  $\vec{k}_R$  und  $\vec{E}_T$  ist parallel zu  $\vec{k}_R$ . Die von  $\vec{E}_T$  in Material 2 angeregten Dipole strahlen, aber nicht entlang ihrer Achse.  $\Rightarrow R_{\parallel}(\alpha_B) = 0$ . Aus  $\alpha_B + \beta_B = \frac{\pi}{2}$  folgt mit dem Snellius'schen Brechungsgesetz

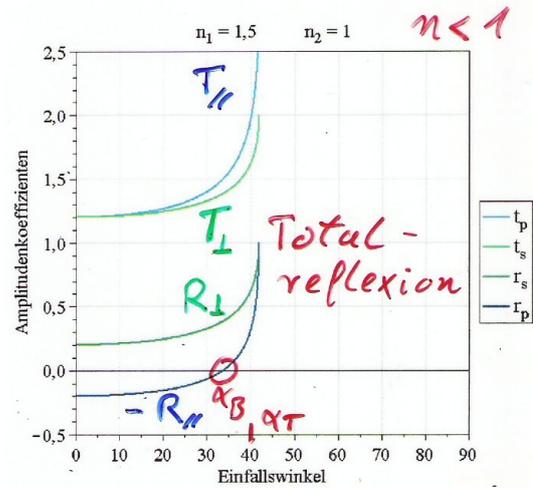
$$\frac{1}{n} \sin(\alpha_B) = \sin(\beta_B) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_B\right) = \cos(\alpha_B)$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \tan(\alpha_B)} \tag{1.6.23}$$

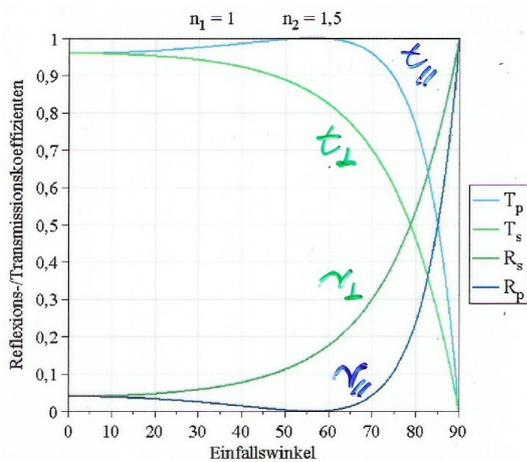
Dies ist der Brewster-Winkel.



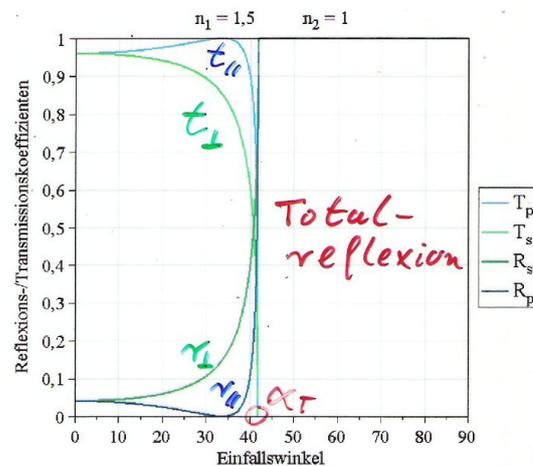
**Abbildung 1.41:** Dargestellt sind die Reflexions- und die Transmissionsamplitude,  $R$  und  $T$ , einer elektromagnetischen Welle beim Übergang vom optisch dünneren ins optisch dickere Medium, aufgetragen über dem Einfallswinkel.



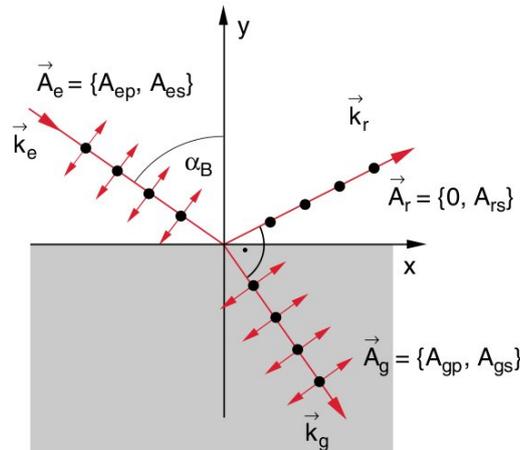
**Abbildung 1.42:** Dargestellt sind die Reflexions- und die Transmissionsamplitude,  $R$  und  $T$ , einer elektromagnetischen Welle beim Übergang vom optisch dickeren ins optisch dünnere Medium, aufgetragen über dem Einfallswinkel.



**Abbildung 1.43:** Dargestellt sind der Reflexions- und der Transmissionskoeffizient  $r$  und  $t$  einer elektromagnetischen Welle beim Übergang vom optisch dünneren ins optisch dickere Medium, aufgetragen über dem Einfallswinkel.



**Abbildung 1.44:** Dargestellt sind der Reflexions- und der Transmissionskoeffizient einer elektromagnetischen Welle beim Übergang vom optisch dickeren ins optisch dünnere Medium, aufgetragen über dem Einfallswinkel.



**Abbildung 1.45:** Beim Brewster-Winkel bilden reflektierter und transmittierter Strahl einen rechten Winkel. Unpolarisiertes Licht wird polarisiert. (Zur Notation:  $A_{rp} \hat{=} E_{T\parallel}$ .)

**Beispiel:**

$\alpha_B = 53^\circ$  für Luft/Wasser, wegen  $k_\perp(\alpha_B) \neq 0$  ist reflektiertes Licht vollständig polarisiert.

**1.6.3.5 Metallreflexion**

Sei das Material 2 ein Ohm'sches Metall.

(A) Elektromagnetische Felder in Ohm'schen Metallen:

Es gilt die Materialgleichung  $\vec{j}^{int} = \sigma \vec{E}$  mit der Leitfähigkeit  $\sigma$ . Es folgt also

$$\dot{\vec{D}} = \epsilon_0 \dot{\vec{E}} + \sigma \vec{E}.$$

Betrachte monochromatische Felder  $\vec{E} \sim e^{i\omega t}$

$$\vec{D} = \left( \epsilon_0 - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = \epsilon(\omega) \vec{E}.$$

**Satz:**

In Ohm'schen Metallen genügen die Felder für  $\omega \neq 0$  den selben Gleichungen, wie in einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon(\omega) = 1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}.$$

Es gibt transversale ebene monochromatische Wellen mit Dispersionrelation  $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)}$ .

(B) Wellendämpfung:

In (zur Vereinfachung) guten Ohm'schen Leitern,  $|\sigma| \gg \omega \epsilon_0$ , gilt  $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}} \sqrt{-i} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}} \frac{1-i}{\sqrt{2}}$  (da ja  $(1-i)^2 = 1+i^2-2i = -2i$ ). Wir haben also  $k(\omega) = \frac{1-i}{\delta(\omega)}$  mit  $\delta(\omega) = c \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\sigma}}$ . Hierbei

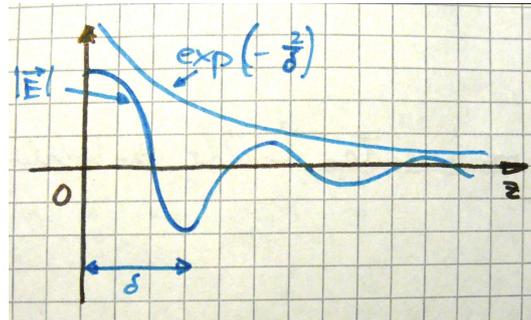


Abbildung 1.46: Verhalten der Welle im Metall.

ist  $\delta$  die Eindringtiefe bzw. Skinlänge. Die Welle ist oszillierend und wird exponentiell gedämpft (cf. Abbildung 1.46)  $E \propto \exp(-2/\delta) \cdot \exp(-i2/\delta)$ . Die Felder fallen in der Nähe der Oberfläche ab. In guten Ohm'schen Metallen gilt  $\vec{E} = 0$  bis auf die Haut („Skin“) der Dicke  $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma\omega}}$ .

(C) Reflexion am Metallspiegel

Für den Fall, dass Material 2 ein Ohm'sches Metall ist, verwende Abschnitt 1.6.3.2. Man erhält

$$R = \frac{1 - n(\omega)}{1 + n(\omega)} \quad \text{mit} \quad n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{n_1}} = \frac{c}{\omega n_1} \frac{1 - i}{\delta(\omega)}$$

$$\xrightarrow{|\delta| \gg \omega \varepsilon_0} -1 + 2\pi \frac{\delta}{\lambda_1} (1 + i) \quad \text{mit} \quad \lambda_1 = \underbrace{\frac{c \cdot 2\pi}{\omega n_1}}_{\text{Wellenlänge in Mat. 1}}$$

Einfallende und reflektierte Welle heben sich (fast) weg. (Fast) die gesamte Energie wird reflektiert  $r = 1 - 4\pi \frac{\delta}{\lambda}$ .

## 1.7 Geometrische Optik

### 1.7.1 Fermat'sches Prinzip

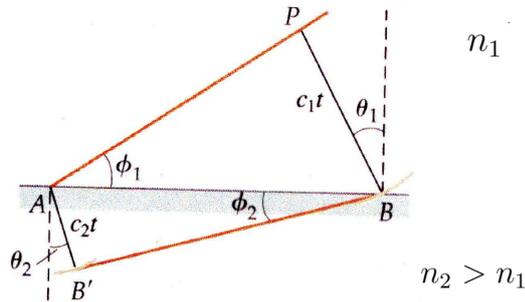
Fermat hat folgendes Theorem postuliert: „Der von Licht (Welle) zurückgelegte Weg ist so, dass die benötigte Zeit minimal (oder maximal) extremal wird.“ Vergleiche hierzu Abbildung 1.47. Für die Laufzeit des Lichtes gilt (cf. Abbildung 1.48)

$$t = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} = \frac{n_1}{c_0} l_1(x) + \frac{n_2}{c_0} l_2(x) = t(x)$$

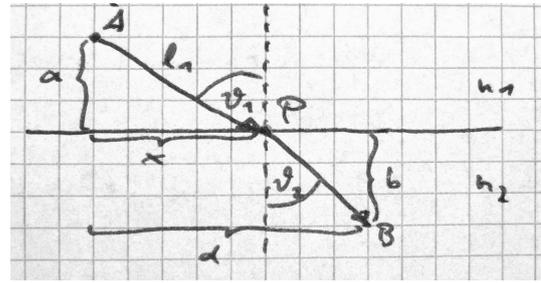
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_0} \left( n_1 \frac{dl_1}{dx} + n_2 \frac{dl_2}{dx} \right) = 0$$

$$\Rightarrow n_1 \frac{dl_1}{dx} = n_2 \frac{dl_2}{dx}$$

Hierbei gilt  $l_1^2 = a^2 + x^2$ ,  $l_2^2 = b^2 + (d - x)^2$ .  
 $\Rightarrow \frac{dl_1}{dx} = \frac{x}{l_1} = \sin(\vartheta_1)$



**Abbildung 1.47:** Brechungsgesetz erklärt mit dem Fermat'schen Prinzip.

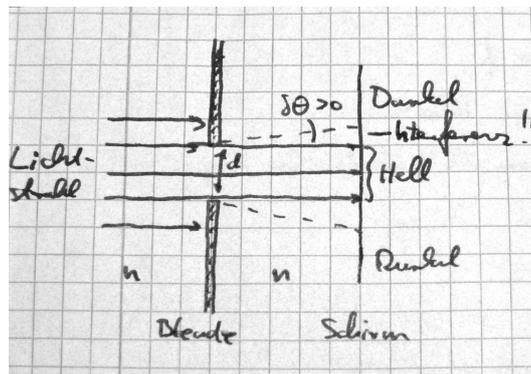


**Abbildung 1.48:** Der Weg des Lichtes an der Grenzfläche zwischen zwei Medien.

$$\Rightarrow \frac{dl_2}{dx} = \frac{d-x}{l_2} = \sin(\vartheta_2)$$

Und insgesamt folgt  $n_1 \cdot \sin(\vartheta_1) = n_2 \cdot \sin(\vartheta_2)$ , also das Snellius'sche Brechungsgesetz.

Bei der geometrischen Optik betrachtet man Lichtstrahlen als Geraden (cf. Abbildung 1.49). Effekte wie



**Abbildung 1.49:** Einschränkungen der geometrischen Optik. Es gilt  $\delta\theta \propto \frac{\lambda}{d}$

Interferenzen werden nicht berücksichtigt. Es müssen also alle betrachteten Längen deutlich größer sein, als die Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes.

**Brechungsindexgradient:**

Jetzt betrachten wir einen Brechungsindexgradienten  $n(\vec{r})$  (cf. Abbildung 1.50). Die Welle bewegt sich dann entlang des optischen Weges  $\Delta_s$  (cf. Abbildung 1.51). Es gilt

$$\Delta_s = \int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r}) ds. \tag{1.7.1}$$

Der optische Weg unterscheidet sich vom geometrischen durch den Faktor  $n(\vec{r})$  im Integral. Die optische Laufzeit berechnet sich zu

$$T_s = \frac{1}{c_0} \int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r}) ds.$$

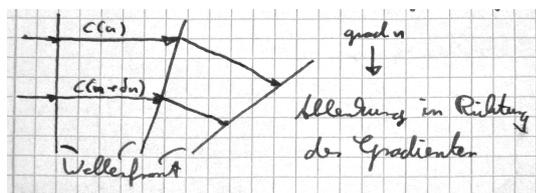


Abbildung 1.50: Die Wellenfront wird in infinitesimalen Abständen gebrochen.

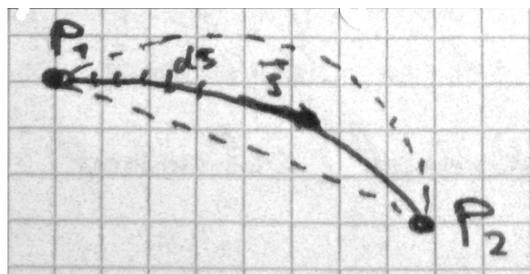


Abbildung 1.51: Optischer Weg  $\Delta_s$ .

Das Fermat'sche Prinzip besagt jetzt, dass  $T_s$  extremal wird.

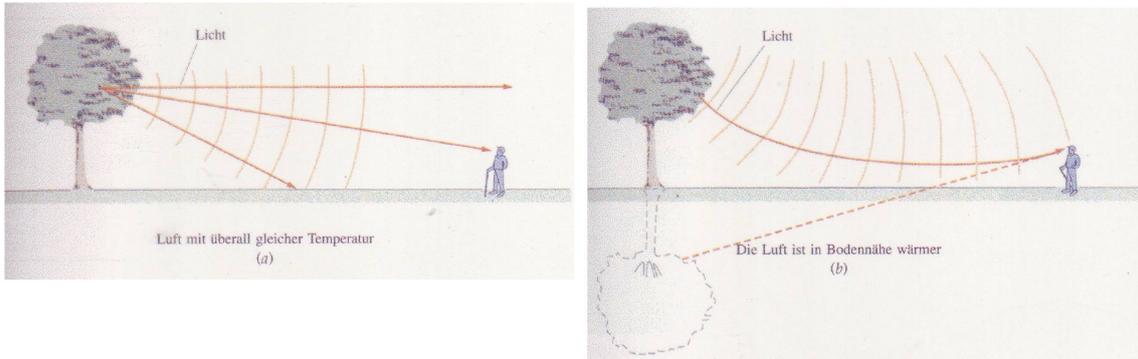
Brechungsindexgradienten treten in der Natur an vielen Stellen auf. So erscheinen an heißen Tagen Motorräder gespiegelt auf der Straße (cf. Abbildung 1.52). Man kann sich den Effekt mit einem Brechungsindexgradienten der am Boden wärmeren Luft leicht erklären (cf. Abbildung 1.53). Außerdem erscheint die Sonne beim Untergang immer etwas verspätet, weil in der Erdatmosphäre ein Brechungsindexgradient herrscht. (cf. Abbildung 1.54).



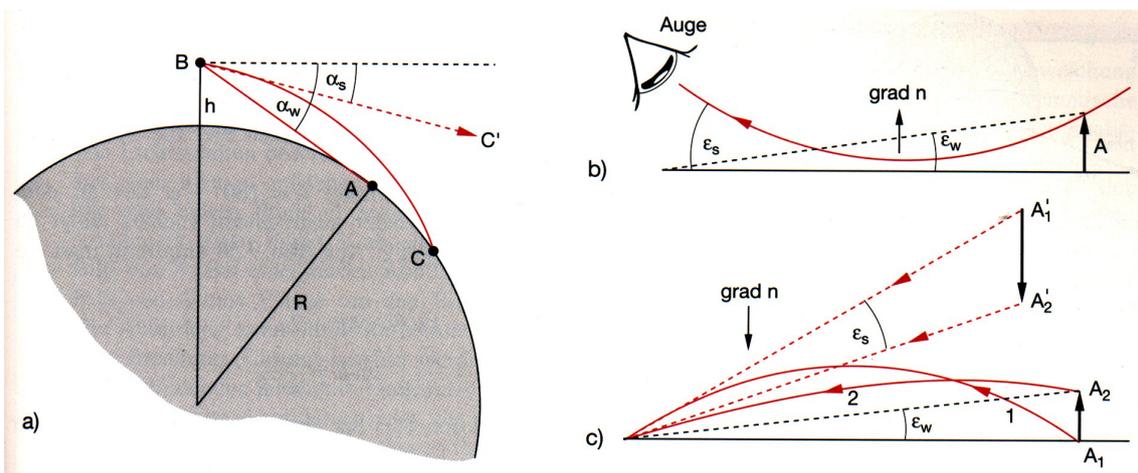
Abbildung 1.52: Luftspiegelung auf einer heißen Straße.

### 1.7.2 Optische Abbildungen

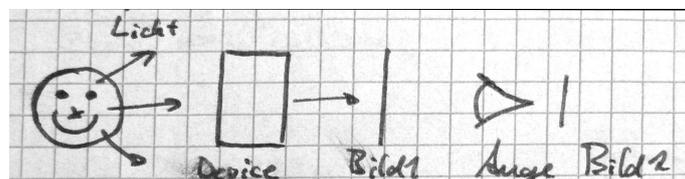
Grundsätzlich liegt bei den im folgenden betrachteten Anordnungen der in Abbildung 1.55 skizzierte Aufbau zu Grunde. Licht wird von einer Quelle ausgesendet und auf dem Weg zu Detektor (Auge/Schirm) von einem „Device“ beeinflusst. Das „Device“ sorgt meistens für eine Erhöhung des Winkels, unter dem ein Gegenstand im Auge wahrgenommen wird, also für eine Vergrößerung.



**Abbildung 1.53:** Eine Luftspiegelung: a) Wenn die Luft überall die gleiche Temperatur hat, dann breiten sich die vom Baum reflektierten Lichtstrahlen gradlinig aus, und die Wellenfronten bleiben kugelförmig. b) Ist die Luft am Boden wärmer, dann bleiben die Wellenfronten nicht mehr kugelförmig, und die Lichtstrahlen (die Normalen auf den Wellenfronten) werden zu einer gekrümmten Linie gebrochen. Der Beobachter sieht den Baum so, als würden die Lichtstrahlen durch eine Wasserfläche am Boden reflektiert.



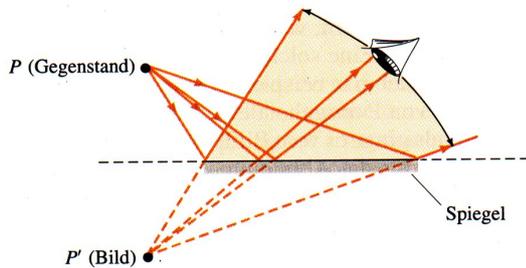
**Abbildung 1.54:** a) Erweiterung der Sichtweite auf Grund der Refraktion der Atmosphäre und Erklärung von Luftspiegelungen (Fata Morgana), b) für  $dn/dh > 0$ , c) für  $dn/dh < 0$ .



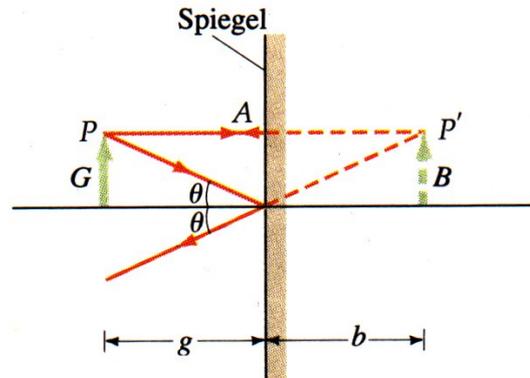
**Abbildung 1.55:** Licht wird durch ein „Device“ manipuliert.

1.7.2.1 Spiegel

Ein ebener Spiegel erzeugt ein Bild von einem Gegenstand in  $P$  (cf. Abbildung 1.56) in  $P'$ . Dem Be-



**Abbildung 1.56:** Bilderzeugung beim ebenen Spiegel. Die vom Punkt  $P$  ausgehenden Strahlen treffen den Spiegel und werden reflektiert. Ein Teil von ihnen trifft das Auge. Es scheint so, als kämen sie vom Punkt  $P'$  hinter dem Spiegel. Das Bild kann überall im farbig getönten Bereich beobachtet werden.



**Abbildung 1.57:** Konstruktion der Abbildung eines Pfeils am ebenen Spiegel.

obachter erscheint ein zweiter Gegenstand in  $P'$ , ein „virtuelles“ Bild, da von  $P'$  im Gegensatz zu  $P$  kein Licht ausgeht.  $P'$  liegt auf der Normalen zu  $S$ , die durch  $P$  geht. Aus der Konstruktionsvorschrift (Reflexionsgesetz) folgt, dass  $G$  und  $B$  gleich groß sind und  $B$  im gleichen Abstand hinter  $S$  liegt wie  $G$  davor.

Ein Spiegel kehrt die  $z$ -Achse um, belässt aber die  $x$ - und  $y$ -Achse (cf. Abbildung 1.58 und 1.59). Er macht aus rechtshändigen Koordinatensystemen linkshändige, da beide zum Spiegel parallele Komponenten ( $x, y$ ) nicht invertiert werden, diejenigen, die senkrecht zum Spiegel stehen ( $z$ ), aber schon.

Zwei Spiegel erzeugen mehr als zwei Bilder, eines durch Einfachreflexion (trivial) und eines durch Zweifachreflexion (cf. Abbildung 1.60). Je nach Orientierung der Spiegel können aber auch beliebig viele Bilder erzeugt werden.

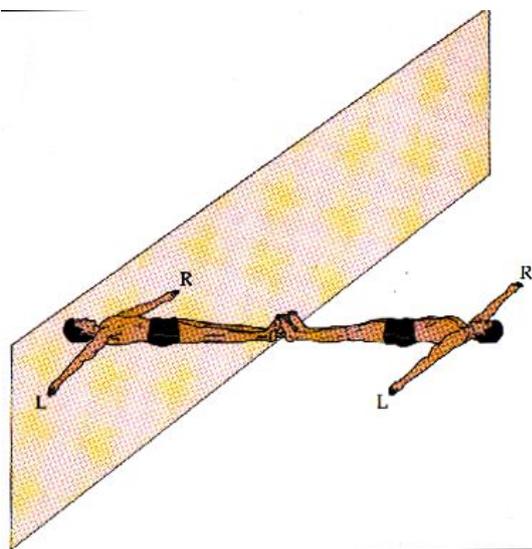
1.7.2.2 Lochkamera

Bei einer Lochkamera ist das Bild um den Mittelpunkt der Lochblende gespiegelt (cf. Abbildung 1.61). Das Bild wird schärfer, je kleiner die Lochblende ist (cf. Strahlensatz). Bei zu kleinen Blenden treten störende Interferenzeffekte auf (cf. Abbildung 1.62).

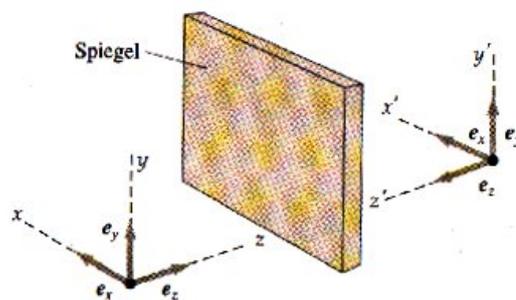
1.7.2.3 Sphärischer Hohlspiegel

Abbildung 1.63 zeigt einen sphärischen Hohlspiegel mit Brennpunkt  $F$ , Kugelmittelpunkt  $M$  und Brennweite  $f = \overline{OF} \approx \frac{R}{2}$ .  $F$ , der Fokus, ist der Punkt, auf dem paralleles Licht konzentriert wird (Strahlen laufen dort zusammen). Das Dreieck  $SFM$  ist daher gleichschenkelig. Außerdem gilt  $\overline{FM} = \frac{R}{2\cos(\alpha)}$  und  $\overline{OF} = R \left(1 - \frac{1}{2\cos(\alpha)}\right)$ .

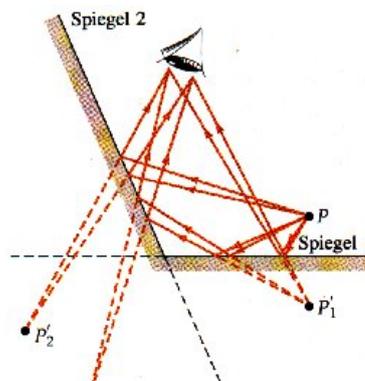
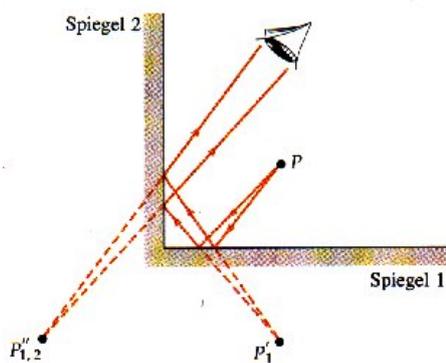
Falls  $h$  klein ist, dann ist  $\cos(\alpha) \approx 1$ . Man kann dann  $\overline{FM} = \overline{OF} = \frac{R}{2}$  annehmen. Diese Näherung nennt man paraxiale Näherung.



**Abbildung 1.58:** Ein Mensch liegt vor einem Spiegel und berührt ihn mit den Füßen. Durch den Spiegel wird die rechte und linke Seite nicht vertauscht, so dass das Bild seitenverkehrt ist: Das Spiegelbild einer rechten Hand ist eine linke Hand.



**Abbildung 1.59:** Abbildung eines rechtwinkligen Koordinatensystems durch einen ebenen Spiegel. Die zum Spiegel parallelen Pfeile entlang der  $x$ - und der  $y$ -Achse zeigen im Bild in die gleiche Richtung wie im Original und verlaufen ebenfalls parallel zum Spiegel. Nur die Richtung des senkrecht zum Spiegel verlaufenden Pfeils entlang der  $z$ -Achse wird im Spiegelbild umgekehrt. Der Spiegel wandelt ein rechtshändiges Koordinatensystem mit  $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$  (dabei sind  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  die Einheitsvektoren entlang der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse) in ein linkshändiges Koordinatensystem mit  $\vec{e}'_x \times \vec{e}'_y = -\vec{e}'_z$  um.



**Abbildung 1.60:** Mehrfachbilder, die durch zwei ebene Spiegel erzeugt werden.  $P'_1$  ist das Bild des Gegenstands  $P$  im Spiegel 1 und  $P'_2$  das Bild des Gegenstands  $P$  im Spiegel 2. Der Punkt  $P''_{1,2}$  ist das Bild von  $P'_1$  im zweiten Spiegel; es entsteht, indem die Lichtstrahlen vom Gegenstand  $P$  zuerst am Spiegel 1 und dann am Spiegel 2 reflektiert werden. Der Punkt  $P'_2$  hat kein Bild im Spiegel 1, weil der Punkt  $P'_2$  hinter dessen Ebene liegt.

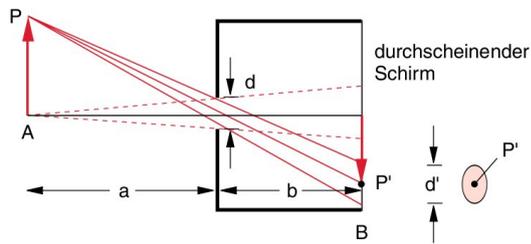


Abbildung 1.61: Schematische Darstellung einer Lochkamera.

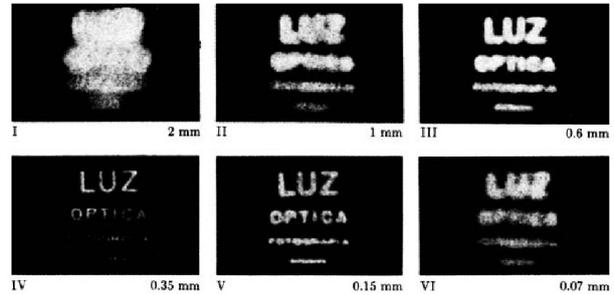


Abbildung 1.62: Abbildung einer beleuchteten Schrifttafel mit Hilfe einer Lochkamera bei verschiedenen Lochdurchmessern.

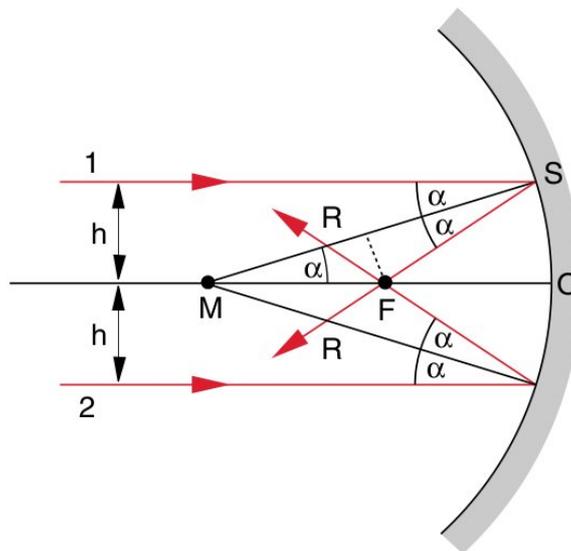
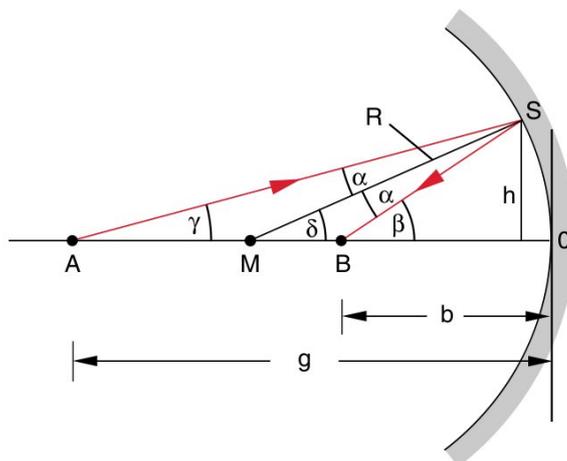


Abbildung 1.63: Sphärischer Hohlspiegel mit Brennpunkt  $F$ , Kugelmittelpunkt  $M$  und Brennweite  $f = \overline{OF} \approx R/2$ .

Es sein also  $h$  (der Abstand von der optischen Achse  $\overline{MF}$ ) klein.  
 Dann gilt für die Brennweite  $f = \frac{R}{2}$ .  
 An Abbildung 1.64 kann man sich das Abbildungsgesetz verdeutlichen. Ist  $f$  die Brennweite,  $b$  die Bild-



**Abbildung 1.64:** Abbildung eines Punktes  $A$  auf der Achse in einen Bildpunkt  $B$ , der ebenfalls auf der Spiegellachse liegt.

weite und  $g$  die Gegenstandsweite, dann gilt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}. \tag{1.7.2}$$

Mit Abbildung 1.65 kann man sich noch den Abbildungsmaßstab klar machen. Es gilt

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{g}{b}. \tag{1.7.3}$$

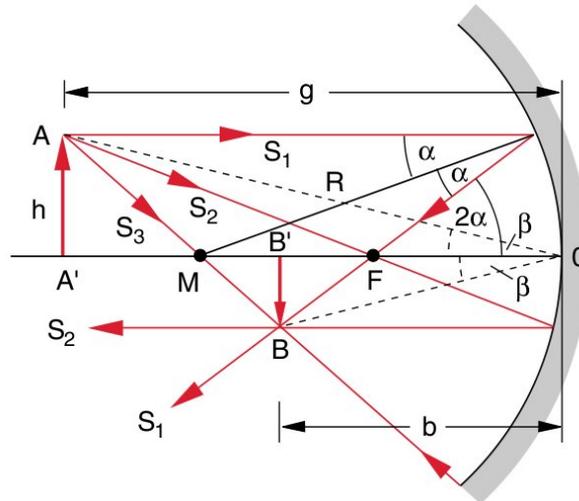
Ein besonderer Hohlspiegel ist die verspiegelte Ellipse (cf. Abbildung 1.66). Der eine Brennpunkt wird auf den anderen abgebildet. Hohlspiegel kann man auch in der Natur beobachten. Beispielsweise entstehen auf diese Weise Regenbögen, wie in Abbildung 1.67 und 1.68 zu sehen ist.

### 1.7.3 Durchgang von Strahlen durch Dielektrika (Prismen, Linsen)

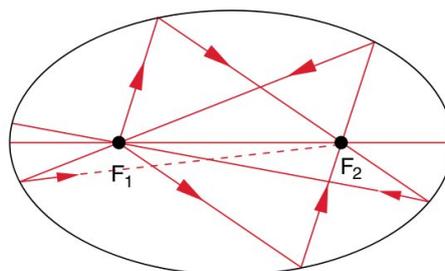
#### 1.7.3.1 Prismen

Betrachte das in Abbildung 1.69 dargestellte Prisma. Man interessiert sich für die gesamte Ablenkung  $\delta(\alpha, \gamma, n)$  des Lichtstrahls durch das Prisma. Es gilt  $\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$ , und  $\gamma = \beta_1 + \beta_2$ . Außerdem gilt  $\beta_1 + \beta'_1 = 90^\circ$ ,  $\beta_2 + \beta'_2 = 90^\circ$ , also  $\beta_1 + \beta'_1 + \beta_2 + \beta'_2 = 180^\circ$ . Damit haben wir  $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$ , wobei  $\gamma$  fest ist. Wir wollen das minimale  $\delta(\alpha_1)$  bestimmen. Daher betrachten wir die Ableitungen:

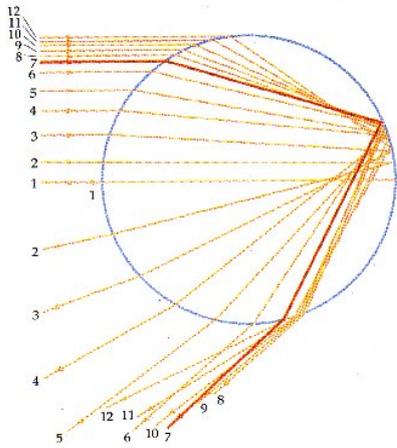
$$\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 1 + \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = \delta_{\min} \Leftrightarrow d\alpha_1 = -d\alpha_2. \tag{1.7.4}$$



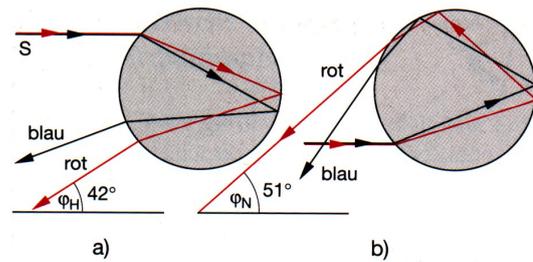
**Abbildung 1.65:** Zur geometrischen Konstruktion eines Punktes des Bildes  $B$  eines beliebigen, aber achsennahen Punktes  $A$ .



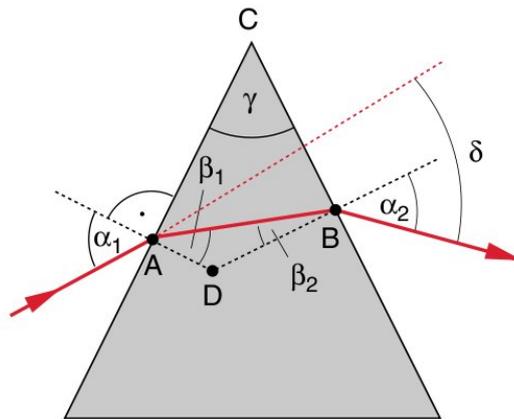
**Abbildung 1.66:** Ein elliptischer Spiegel bildet genau zwei Punkte, nämlich die Brennpunkte  $F_1, F_2$  ineinander ab.



**Abbildung 1.67:** Der Ablenkwinkel  $\phi_A$  in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\theta_1$ . Für  $\theta_1 = 60^\circ$  hat  $\phi_A$  ein Minimum. Hier ist  $d\phi_A/d\theta_1 = 0$ . Für Einfallswinkel, die etwas größer oder etwas kleiner als  $60^\circ$  sind, ist der Ablenkwinkel näherungsweise gleich.



**Abbildung 1.68:** Erklärung der Entstehung von Haupt- und Nebenregenbogen.



**Abbildung 1.69:** Ablenkung  $\delta$  eines Lichtstrahls durch ein Prisma.

Mit dem Snellius'schen Brechungsgesetz gilt

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_1) &= n \cdot \sin(\beta_1) \\ \sin(\alpha_2) &= n \cdot \sin(\beta_2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_1)d\alpha_1 &= n \cdot \sin(\beta_1)d\beta_1 \\ \sin(\alpha_2)d\alpha_2 &= n \cdot \sin(\beta_2)d\beta_2\end{aligned}$$

mit  $d\beta_1 = -d\beta_2$  folgt  $\frac{\cos(\alpha_1)d\alpha_1}{\cos(\alpha_2)d\alpha_2} = -\frac{\cos(\beta_1)}{\cos(\beta_2)}$ . Für minimale Ablenkungen haben wir mit (1.7.4)

$$\Rightarrow \frac{\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)} = \frac{\cos(\beta_1)}{\cos(\beta_2)} \Rightarrow \frac{1 - \sin^2(\alpha_1)}{1 - \sin^2(\alpha_2)} = \frac{n^2 - \sin^2(\alpha_1)}{n^2 - \sin^2(\alpha_2)}$$

Für  $n > 1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  haben wir symmetrischen Einfall und Ausfall. Wir sehen

$$\boxed{\delta_{\min} = 2\alpha - \gamma.} \quad (1.7.5)$$

Mit dem Brechungsgesetz ergibt sich

$$\sin(\alpha) = \sin\left(\frac{\delta + \gamma}{2}\right) = n \cdot \sin(\beta) = n \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Ableiten führt zu

$$\frac{d\delta}{dn} \cos\left(\frac{\delta + \gamma}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

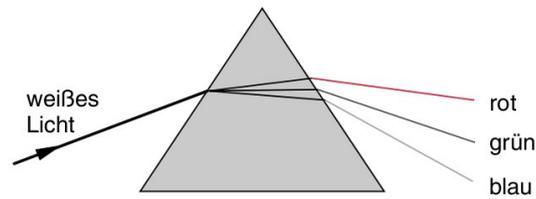
$$\boxed{\frac{d\delta}{dn} = \frac{2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}}} \quad (1.7.6)$$

Meistens ändert man nicht den Brechungsindex direkt durch Veränderung des Materials, sonder indirekt durch Veränderung der Wellenlänge  $\lambda$ , denn  $n$  hängt von der Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes ab. Es gilt daher

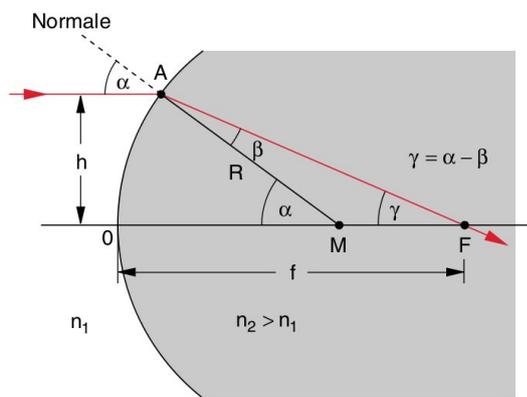
$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{d\delta}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dn}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}} \frac{dn}{d\lambda}}, \quad (1.7.7)$$

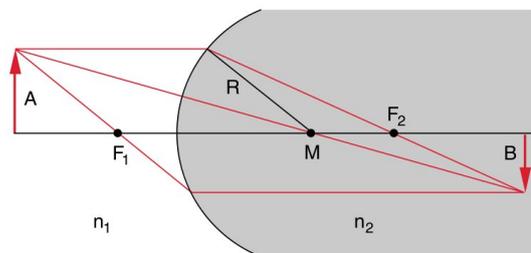
wobei  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ . Dies ist die *Dispersionsformel des Prismas*. Die Dispersion sorgt dafür, dass ein Prisma weißes Licht in seine Bestandteile auftrennt (cf. Abbildung 1.70).



**Abbildung 1.70:** Im Bereich normaler Dispersion ( $dn/d\lambda < 0$ ) wird blaues Licht stärker gebrochen als rotes Licht.



**Abbildung 1.71:** Zur Definition der Brennweite einer sphärisch gekrümmten Grenzfläche.



**Abbildung 1.72:** Geometrische Strahlenkonstruktion bei der Abbildung eines Gegenstandes  $A$  durch eine sphärische Grenzfläche.

1.7.3.2 Linsen

Nun wenden wir uns dem wichtigsten optischen Instrument zu. Betrachte das kugelförmige Dielektrikum in Abbildung 1.71. Wir verwenden wieder die paraaxiale Näherung, da  $h \ll R$ . Es gilt  $\beta + \gamma = \alpha$ . Die Kreisbogenstrecke kann durch  $\overline{OA} \approx R \cdot \alpha = f \cdot \sin(\gamma)$  bestimmt werden. Das Brechungsgesetz kann nun als  $n_1\alpha = n_2\beta$  geschrieben werden. Damit gilt

$$\boxed{f_2 = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} R} \Rightarrow f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R. \tag{1.7.8}$$

Analog gilt  $f_1 = \frac{n_1}{n_1 - n_2} R$ .

Nun wollen wir die Abbildungsgleichung für eine gekrümmte Oberfläche herleiten. Betrachte hierzu Abbildung 1.73. Es gilt  $\alpha = \delta + \varepsilon$ ;  $\beta = \delta - \gamma$ ;  $n_1\alpha = n_2\beta$ . Es folgt

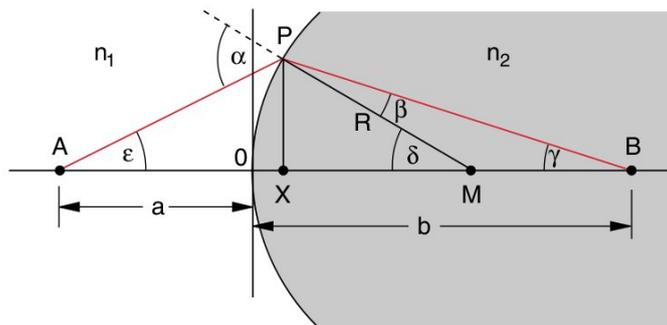


Abbildung 1.73: Zur Herleitung von (1.7.9).

$$n_1(\delta + \varepsilon) = n_2(\delta - \gamma),$$

$$\frac{\overline{PO}}{R} = R \cdot \delta \cdot b \cdot \gamma = g \cdot \varepsilon,$$

also insgesamt

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

und schließlich haben wir

$$\boxed{\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_1}{f_1}}. \tag{1.7.9}$$

Dies ist die Abbildungsgleichung für eine gekrümmte Oberfläche. Damit folgt schon die Linsengleichung:

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \tag{1.7.10}$$

$$\stackrel{g \rightarrow \infty}{\Rightarrow} f = \frac{1}{n - 1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \stackrel{*}{=} \frac{1}{1 - n} \cdot \frac{R}{2}$$

\* für den Spezialfall  $R_1 = -R_2$  „bikonvex“.

1.7.3.3 Dünne Linse

Es findet eine zweifache Abbildung an einer sphärischen Fläche statt. Vergleiche für die folgende Diskussion Abbildung 1.74. Es ist  $B_1$  das Bild an der ersten Oberfläche,  $B_2$  das Bild an der zweiten Oberfläche.

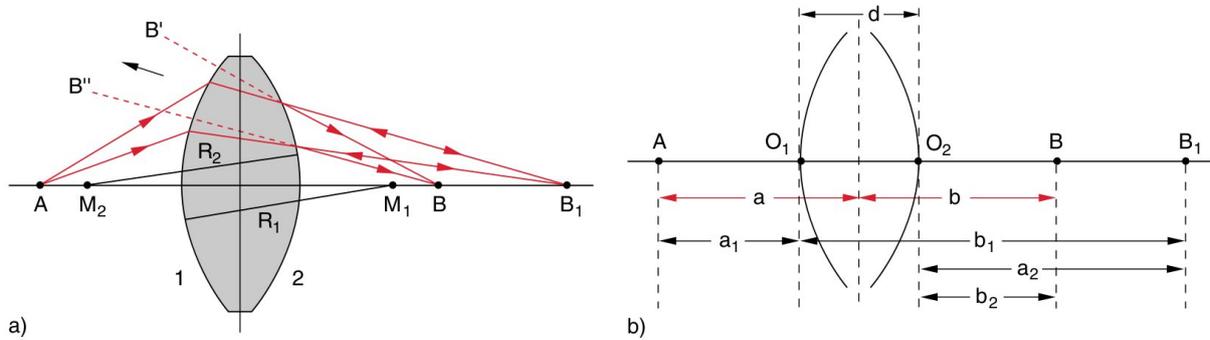


Abbildung 1.74: Zur Herleitung der Linsengleichung (1.7.12).

1. Fläche: ( $n_1 = 1, n_2 = n$ )

Oben haben wir schon gesehen, dass gilt

$$\frac{1}{g_1} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{R_1}. \tag{1.7.11}$$

2. Fläche:

Betrachte  $B_1$  als neuen Gegenstand, der durch die Fläche 2 auf  $B_2$  abgebildet wird. Dann gilt

$$g_2 = -(b_1 - d), \quad n_1 = n, \quad n_2 = 1, \quad R = -R_2.$$

Damit wird die Abbildungsgleichung zu

$$\frac{-n}{b_1 - d} + \frac{1}{b_2} = \frac{1-n}{R_2}.$$

Setzt man nun für  $b_1$  (1.7.11) ein und formt geeignet um, so erhält man

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{b_2} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{n \cdot d}{b_1(b_1 - d)}.$$

Jetzt seien die neuen Abstände  $g = g_1 + \frac{d}{2}$  und  $b = b_2 + \frac{d}{2}$  (mit  $d \ll g$  und  $d \ll b$ ) ein. Es ergibt sich

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \tag{1.7.12}$$

Für einen achsenparallelen Strahl (d.h.  $g = \infty$ ) ist  $b = f$ , d.h. die Brennweite  $f$  ist

$$\boxed{f = \frac{1}{n-1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \tag{1.7.13}$$

und falls eine bikonvexe Linse mit gleichen  $R$  vorliegt, also  $R_1 = R_2$  gilt, folgt

$$f = \frac{1}{n-1} \frac{R}{2}.$$

Aus (1.7.12) und (1.7.13) folgt die Abbildungsgleichung

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}. \tag{1.7.14}$$

Setzt man  $g = f + x_a$  und  $b = f + x_b$  (cf. Abbildung 1.75) in (1.7.14) ein, so erhält man die Newton'sche

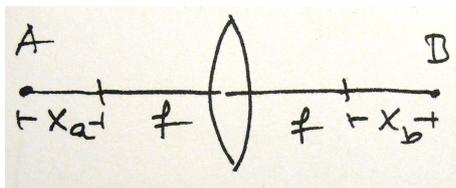


Abbildung 1.75: Zur Erklärung von  $x_a$  und  $x_b$ .

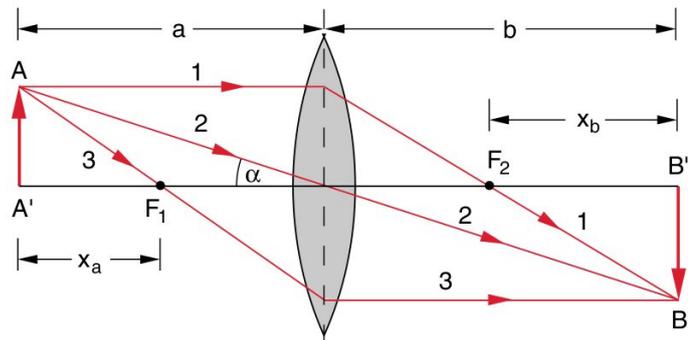


Abbildung 1.76: Zeichnerische Konstruktion der Abbildung durch eine dünne Linse.

Abbildungsgleichung

$$\boxed{x_a \cdot x_b = f^2}. \tag{1.7.15}$$

Außerdem kann man sich an Abbildung 1.76 die Vergrößerung

$$M = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = -\frac{b}{g} = \frac{f}{f-g} \tag{1.7.16}$$

klar machen.

### 1.7.3.4 Dicke Linsen

**Definition:** (Hauptebene)

Als Hauptebenen  $H_1$  und  $H_2$  bezeichnet man die Ebenen, welche senkrecht zur optischen Achse liegen und durch die Punkte  $h_1$  und  $h_2$  gehen (cf. Abbildung 1.77).

Bei dünnen Linsen galt  $d \ll g, b, f$ . Man kann mit einigem Aufwand zeigen, dass, wenn alle Längen  $g, b, f$  von den nächstliegenden Hauptebenen gezählt werden, die Abbildungsgleichung der dünnen Linse gilt. Die Lichtstrahlen werden also an jeder Hauptebene zu den Gleichen Gesetzen gebrochen, wie sie an der Mittelebene einer dünnen Linse gebrochen werden, d.h.

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{x_a \cdot x_b = f^2}, \tag{1.7.17}$$

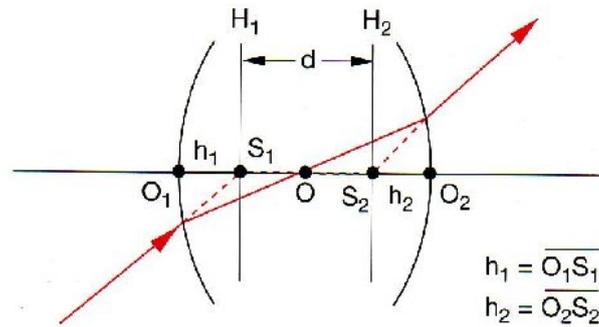


Abbildung 1.77: Zur Definition der Hauptebenen einer dicken Linse.

allerdings jetzt mit

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \underbrace{\frac{(n-1)d}{nR_1R_2}}_{\text{neuer Term}} \right]. \quad (1.7.18)$$

Für die langen Hauptachsen gilt

$$h_1 = \overline{O_1 S_1} = -\frac{(n-1)fd}{nR_2}, \quad (1.7.19)$$

$$h_2 = \overline{O_2 S_2} = -\frac{(n-1)fd}{nR_1}. \quad (1.7.20)$$

### 1.7.3.5 Linsensysteme

Wir wollen uns in diesem Abschnitt auf die Diskussion von zwei Linsen beschränken. Die Zusammenhänge, werden sich aber auf komplexere Systeme übertragen lassen. Im wesentlichen sind bei der Betrachtung eines Systems aus zwei Linsen zwei Fälle zu unterscheiden,  $d > f_1 + f_2$  und  $d < f_1 + f_2$ , wobei  $d$  der Abstand der Linsen (Hauptebenen) ist und  $f_{1/2}$  deren Brennweiten.

(A)  $d > f_1 + f_2$ :

Betrachte Abbildung 1.78. Falls  $g_1 \rightarrow \infty$ , so folgt  $b_1 = f_1$  (Bild im Fokus von  $L_1$ ). Dieses Bild hat „Gegenstandsweite“  $g_2 = d - f_1$ , für  $L_2$ . Wegen  $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{g_2} + \frac{1}{b_2}$  gilt

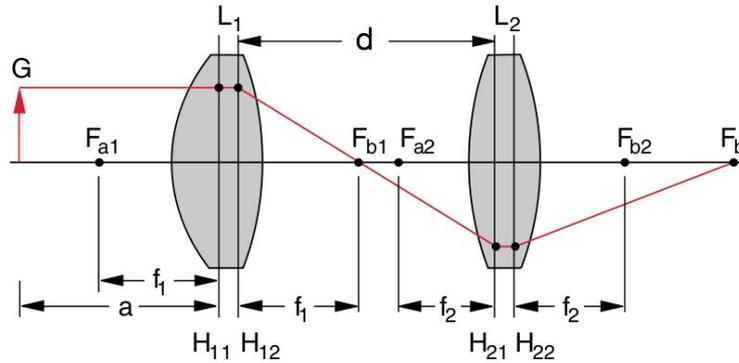
$$b_2 = \frac{g_2 f_2}{g_2 - f_2} = \frac{(d - f_1) f_2}{d - f_1 - f_2}$$

mit Brennweite  $f$  des Gesamtsystems, also

$$f = \frac{(g_1 + d)b_2}{g_1 + d + b_2}, \quad (1.7.21)$$

folgt schließlich

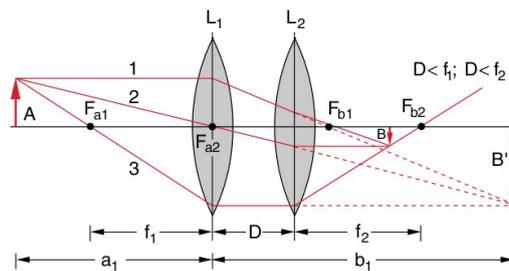
$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}}$$



**Abbildung 1.78:** Beispiel eines optischen Systems aus zwei dicken Linsen. Es ist  $F_{b1}$  der Fokus, also das Bild von  $L_1$  und  $F_b$  der bildseitige Brennpunkt des Linsensystems.

(B)  $d < f_1 + f_2$

Betrachte Abbildung 1.79. Die Brechkraft ist größer geworden. Im Gesamtsystem gelten die Größen  $A =$  Gegenstandsweite und  $B =$  Bildweite. Gilt  $g = f_1$ ,  $b = f_2$ , so folgt mit der Linsengleichung



**Abbildung 1.79:** Beispiel eines optischen Systems aus zwei Linsen.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b};$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \tag{1.7.22}$$

die Brechzahlen  $\left(\frac{1}{f_i}\right)$  addieren sich also.

### 1.7.3.6 Linsenfehler

#### (A) Chromatische Aberration

Da der Brechungsindex  $n$  von der Wellenlänge  $\lambda$  des gebrochenen Lichtes abhängt, hängt auch die Brennweite  $f$  von  $\lambda$  ab. Vergleiche hierzu Abbildung 1.80 Den dadurch entstehenden Fehler nennt man chromatische Aberration. Man kann sie durch einen so genannten Achromat korrigieren, also durch zwei Linsen unterschiedlicher Brechungsindizes  $n_i(\lambda)$  und verschiedener Radii  $R_1$  und

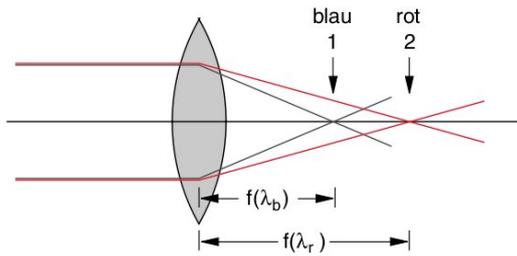


Abbildung 1.80: Chromatische Aberration.

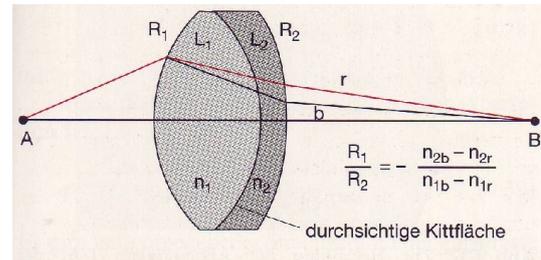


Abbildung 1.81: Achromat.

$R_2$ . Vergleiche Abbildung 1.81. Es ist  $L_1$  eine Sammellinse und  $L_2$  eine Zerstreuungslinse. Durch Berechnung von  $f_1$  und  $f_2$  mit der Linsengleichung (1.7.10) für zwei Wellenlängen  $\lambda_1$  (blau) und  $\lambda_2$  (rot), dann ergeben sich die zugehörigen Brennweiten  $f_{rot}$  und  $f_{blau}$  für das System nach  $\frac{1}{f_{rot}} = \frac{1}{f_{rot1}} + \frac{1}{f_{rot2}}$ . Aus der Forderung  $f_{rot} = f_{blau}$  folgt dann

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{n_{rot2} - n_{blau2}}{n_{blau1} - n_{rot1}}$$

(B) **Sphärische Aberration**

Sphärische Aberration tritt beim sphärischen Hohlspiegel für achsenferne Strahlen auf. Man kann diese Aberration vermeiden, indem man parabolisch geformte Hohlspiegel verwendet.

(C) **Koma**

Verschiedene Strahlen haben verschiedene Brennpunkte für *gekippte* Orientierung der Linse (cf. Abbildung 1.82).

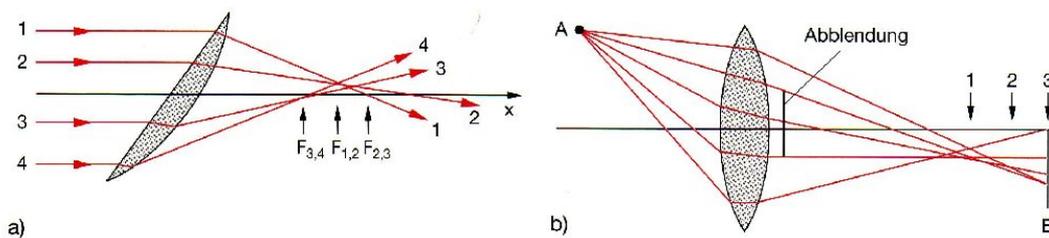
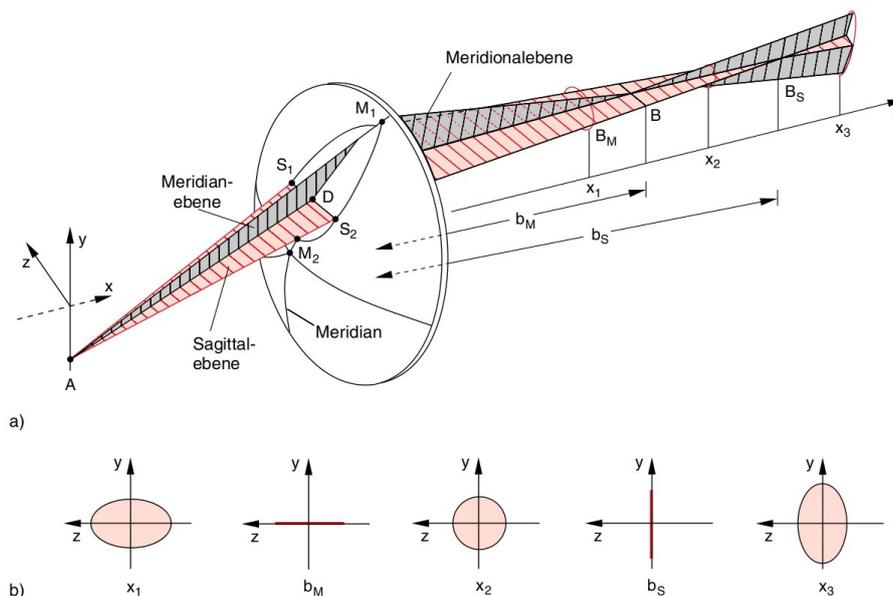


Abbildung 1.82: a) Koma beim Durchlaufen eines Parallellichtbündels durch eine schiefe Linse. Die einzelnen Teilbündel führen zu räumlich verschiedenen Brennpunkten  $F_i$ . b) Bei der Abbildung eines Punktes  $A$  außerhalb der Symmetrieachse führen die verschiedenen Teilbündel zu unterschiedlichen Bildpunkten  $B_i$ .

(D) **Astigmatismus**

Betrachte Abbildung 1.83. Strahlen in der horizontalen Ebene (Sagittal-Ebene) werden in den  $B_S$  abgebildet (Punkt), in der senkrechten Ebene aber (wegen Durchstoßung der Linse in größeren Abständen von der optischen Achse) an einem *anderen* Punkt  $B_M$ . Es kommt zu einer linienförmigen Verzerrung in  $b_M$  und  $b_S$ .



**Abbildung 1.83:** a),b) Astigmatismus bei der Abbildung eines schrägen Lichtbündels. a) Perspektivische Ansicht; b) Lichtbündeldurchschnitt in der Ebene im Abstand  $x_1, b_M, x_2, b_S, x_3$ .

Linsensysteme finden sich in vielen abbildenden Optiken wieder. Dazu gehören

- Auge
- Lupe
- Fernrohr
- Mikroskop

## 1.8 Interferenz

### 1.8.1 Interferenz von zwei Punktquellen

Interferenz von Wellen bedeutet Überlagerung mehrerer Wellen, im einfachsten Fall von zwei Wellen. Sind die Wellenamplituden klein (so dass nichtlineare Effekte vernachlässigt werden können), so gilt die *Superposition* der Felder, d.h.  $E = E_1 + E_2$ . Ist die Phasenbeziehung zwischen den Wellen *konstant* (d.h. nicht zeitabhängig), so entsteht ein räumliches Muster der Gesamtwellen (genannt „Interferenzmuster“).

Konstante Phasenbeziehung bedeutet:

- Die Wellen stammen von der gleichen Quelle,  $S_1 = S_2$ .
- Beide (räumlich getrennten) Quellen ( $S_1, S_2$ ) sind bei gleicher Frequenz, d.h. strikt monochromatisch, also phasengekoppelt.

**Beispiel 1:** (Versuch)

Zwei Kugelwellen werden durch konzentrische Ringe auf einer Folie simuliert. Betracht hierzu Abbildung 1.84. Man legt zwei solche Folien übereinander und beobachtet die Orte, wo sich die Ringe schneiden. Diese sind offenbar durch einfache geometrische Linien miteinander verbunden. Seien die Ringe Maxima von  $E_1$  bzw.  $E_2$ , so ist an den Kreuzungspunkten offenbar  $E_1$  mit  $E_2$  „in Phase“. Man spricht von konstruktiver Interferenz. Orte, wo Maxima von  $E_1$  auf negative Maxima von  $E_2$  treffen, sind Orte

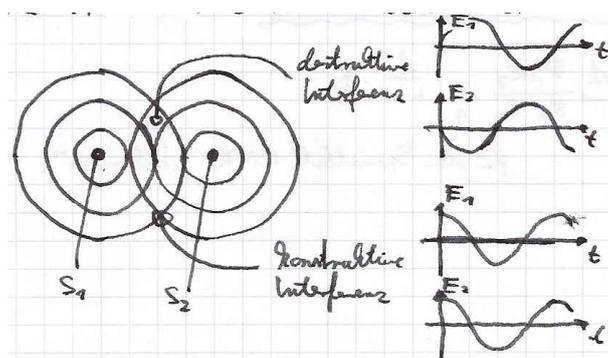


Abbildung 1.84: Zwei überlagerte Kugelwellen.

destruktiver Interferenz. Offenbar ist die Summe  $E = E_1 + E_2$  klein (bzw. 0, falls  $|E_1| = |E_2|$ ). Für die Intensität der Welle gilt natürlich

$$I = \frac{\varepsilon_0}{2} c |E|^2,$$

also

$$\begin{aligned} I &= c \frac{\varepsilon_0}{2} (|E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_1| \cdot |E_2|^* + |E_1|^* \cdot |E_2|) \\ &= I_1 + I_2 + I_{12}. \end{aligned}$$

Hierbei gilt dann

$$\begin{aligned} I_{12} &= c \frac{\varepsilon_0}{2} E_1^0 E_2^0 (e^{i\Delta\varphi} + e^{-i\Delta\varphi}) \\ &= c \varepsilon_0 E_1^0 E_2^0 \cos(\Delta\varphi), \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

wobei  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  die (feste) Phasendifferenz der beiden Wellen ist. Natürlich ist  $\Delta\varphi$  ortsabhängig. Man kann leicht einsehen, dass *konstruktive* Interferenz auftritt für Orte, wo  $\Delta\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots = 2m\pi$ . Hierbei ist  $m$  die Ordnung der Interferenz. Es gilt dann

$$\begin{aligned} I_{\max} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \\ &= 4I_1 \quad \text{für } I_1 = I_2. \end{aligned}$$

Man hat *destruktive* Interferenz für Orte, wo  $\Delta\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots = (2m+1)\pi$ . Damit haben wir

$$\begin{aligned} I_{\min} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \\ &= 0 \quad \text{für } I_1 = I_2. \end{aligned}$$

Allgemein gilt für  $I_1 = I_2 = I_0$

$$I = 2I_0(1 + \cos(\Delta\varphi)) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right).$$

Man kann das Interferenzmuster durch eine geometrische Darstellung berechnen. Betrachte hierfür Abbildung 1.85. Wir interessieren uns für die Intensität im Punkt  $P$ . Es gilt  $\Delta\varphi = k \cdot (\overline{S_1P} - \overline{S_2P})$ . Im einfachen Grenzfall  $\overline{S_1P} \approx \overline{S_2P} \gg d$  (weit entfernte Quellen, cf. Abbildung 1.86) sind  $\overline{S_1P}$  und  $\overline{S_2P}$  nahezu parallel und es gilt  $\overline{S_2P} - \overline{S_1P} = d \cdot \sin(\alpha)$ ,  $\Delta\varphi = k \cdot d \cdot \sin(\alpha)$ . Für die Beobachtungsrichtung

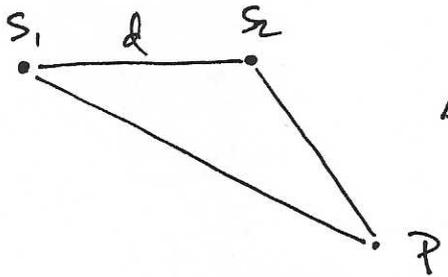


Abbildung 1.85: Die Interferenz im Punkt  $P$ .

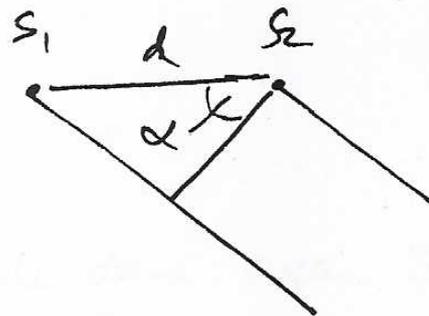


Abbildung 1.86: Näherung für  $\overline{S_1P} \approx \overline{S_2P} \gg d$ .

$\alpha \approx 0$  (cf. Abbildung 1.87) gilt  $\Delta\varphi = k \cdot d \cdot \alpha = k \cdot d \cdot \frac{y}{l}$ . Dies führt zur Interferenzfigur des Doppelspalts im Fernfeld, denn die beiden Spalten mit einer Spaltbreite, die wesentlich kleiner ist als ihr Abstand wirken wegen des Huygens'schen Prinzips genauso, wie zwei synchrone Punktquellen. Es kommt genau dann zu

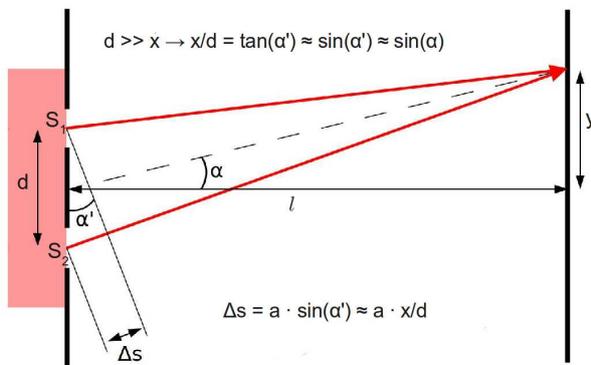


Abbildung 1.87: Zur Intensitätsverteilung bei Interferenz zweier Punktquellen.

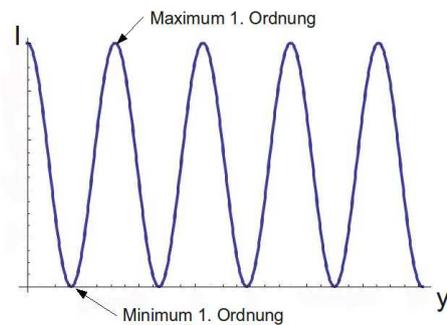


Abbildung 1.88: Intensitätsverteilung bei Anordnung aus Abbildung 1.87.

einem Intensitätsmaximum im Interferenzbild (Abbildung 1.88), wenn der optische Wegunterschied der interferierenden Wellen ein Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$  ist. Die Position  $y_{\max,n}$  des  $n$ -ten Maximums berechnet sich also mit

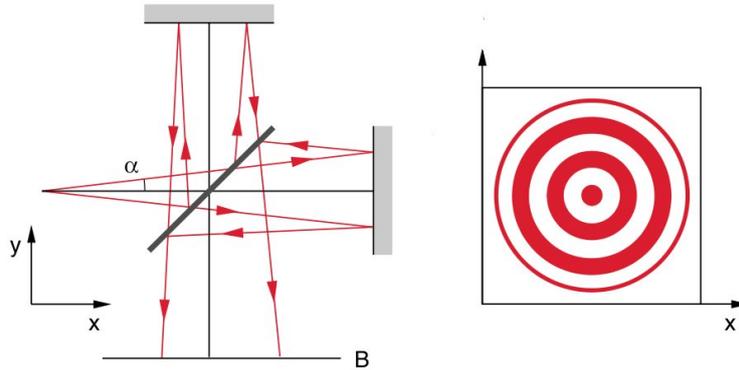
$$y_{\max,n} = n \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d}. \tag{1.8.2}$$

Das  $n$ -te Minimum erhält man durch

$$y_{\min,n} = (2n - 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{l}{d}. \tag{1.8.3}$$

### 1.8.2 Michelson Interferometer

Das Michelson Interferometer gehört in die Kategorie der Zweistrahlinterferometer. Die Funktionsweise wird schematisch in Abbildung 1.89 veranschaulicht. Wir suchen  $I = I(s_1 - s_2) = I(\Delta s)$ , wobei  $\Delta s$  die



**Abbildung 1.89:** Links: Schematische Darstellung eines Michelson Interferometers. Rechts: Entstehung eines Interferenzringsystems bei divergenter einfallender Welle.

Wegdifferenz ist. Die einfallende Welle kann durch

$$E_e = A_e \cdot \cos(\omega t - kz)$$

beschrieben werden. Nach einer Reflexion am Strahlteiler und einer Transmission durch den Strahlteiler ist die Welle  $E$

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{RT} A_e \cdot \cos(\omega t + \varphi_1), \\ E_2 &= \sqrt{RT} A_e \cdot \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Hierbei ist  $R$  der Reflexionskoeffizient der Intensität des Strahlteilers und  $T$  sein Transmissionskoeffizient der Intensität.  $E_1$  und  $E_2$  haben die gleiche Amplitude, da jeweils einmal reflektiert und transmittiert wurde. Wir erhalten mit den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} I &= c\varepsilon_0 (E_1 + E_2)^2 \\ &= c\varepsilon_0 RT A_e^2 [\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)]^2. \end{aligned}$$

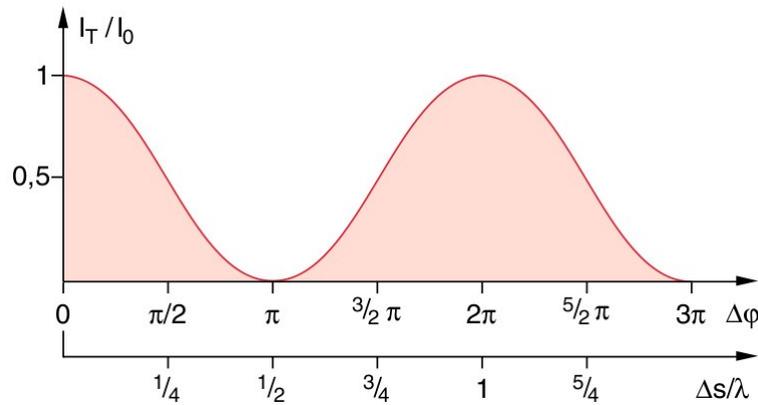
Für die über die Zeit gemittelte Intensität gilt dann

$$\langle I \rangle_t = 2RT \langle I_0 \rangle (1 + \cos(\Delta\varphi)).$$

Hierbei ist zu beachten, dass  $\langle I_0 \rangle_t = c\varepsilon_0 \frac{A_e^2}{2}$  und  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (s_1 - s_2)$ , denn  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle_t = \frac{1}{2}$ . Mit  $R = T = 0,5$  folgt

$$\langle I \rangle_t = \frac{1}{2} \langle I_0 \rangle (1 + \cos(\Delta\varphi)).$$

Für festes  $\Delta s$  oszilliert  $\frac{\langle I \rangle_t}{\langle I_0 \rangle_t}$  mit  $\frac{1}{\lambda}$ , gewisse Wellenlängen werden transmittiert, andere nicht. Das Mi-



**Abbildung 1.90:** Transmission des Michelson Interferometers als Funktion des Wegunterschiedes  $\Delta s/\lambda$  in Einheiten der Wellenlänge  $\lambda$  bei monochromatischer einfallender ebener Welle.

chelson Interferometer funktioniert als Wellenlängenmessgerät: man bewegt  $M_2$  (oder  $M_1$ ) auf einem Mikrometerverschiebeschlitten um  $\Delta z$  und zählt die Anzahl  $N$  der Interferenzmaxima, die vorbeistreichen (cf. Abbildung 1.89). Jedes dieser Maxima entspricht einer Verschiebung  $\Delta s = 2\Delta z$  um  $\lambda$ . Somit ergibt sich insgesamt

$$\lambda = \frac{2\Delta z}{N}. \tag{1.8.4}$$

Man erreicht mit dem Michelson-Interferometer eine sehr hohe Genauigkeit, die für das berühmte Michelson-Marley Experiment (cf. Relativitätstheorie) wichtig ist.

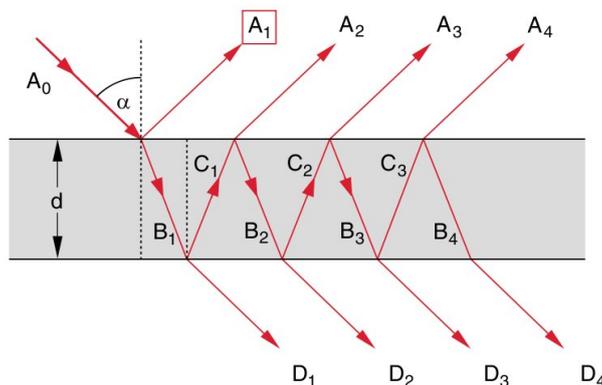
### 1.8.3 Vielstrahl-Interferenz

Betrachte hierzu Abbildung 1.91. Die einfallende Welle wird beschrieben durch

$$E = A_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

Der reflektierte Anteil der  $i$ -ten Welle ist gegeben durch  $A_i \sqrt{R}$  (wir vernachlässigen, dass  $R = R(\alpha)$ , also dass die Reflexion vom Einfallswinkel abhängt) und der transmittierte Anteil durch  $A_i = \sqrt{1 - R}$ . Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} |A_1| &= \sqrt{R}|A_0| & |B_1| &= \sqrt{1 - R}|A_0| \\ |C_1| &= \sqrt{R(1 - R)}|A_0| & |D_1| &= (1 - R)|A_0| \\ \\ |A_2| &= \sqrt{1 - R}|C_1| = (1 - R)\sqrt{R}|A_0| \\ |B_2| &= \sqrt{R}|C_1| = R\sqrt{1 - R}|A_0| \\ &\vdots \\ |A_{i+1}| &= R \cdot A_i \quad \text{für } i \geq 2 \\ |D_{i+1}| &= R \cdot D_i \quad \text{für } i \geq 1 \end{aligned}$$



**Abbildung 1.91:** Vielstrahl-Interferenz an zwei planparallelen Grenzschichten mit dem Reflexionsvermögen  $R$  und dem Abstand  $d$ .

Damit erhalten wir für den Phasenunterschied zwischen zwei parallelen Strahlen  $(i, i + 1)$  sowohl in Reflexion, als auch in Transmission:

$$\begin{aligned}\Delta s &= 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)} \\ \Rightarrow \Delta\varphi &= 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \delta\varphi.\end{aligned}\quad (1.8.5)$$

Ist die Welle  $E$  senkrecht zur Ebene, so gilt

- für Reflexion am dichteren Medium  $\delta\varphi = \pi$ .
- für Reflexion am dünneren Medium  $\delta\varphi = 0$ .

Wenn die Welle  $E$  parallel zur Ebene ist, dann gilt

- für Reflexion am dichteren Medium  $\delta\varphi = 0$  für  $\alpha < \alpha_B$  und  $\delta\varphi = \pi$  für  $\alpha > \alpha_B$ .
- für Reflexion am dünneren Medium  $\delta\varphi = \pi$  für  $\alpha < \alpha_B$  und  $\delta\varphi = 0$  für  $\alpha > \alpha_B$ .

Für  $i \geq 2$  ist immer

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda}.$$

Spezialfall:

$$A_1^\perp = \sqrt{R}A_0 e^{i\pi} = -\sqrt{R}A_0$$

Wir haben hier eine geometrische Reihe

$$A_1^\parallel = \pm\sqrt{R}A_0.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + \sum_{m=2}^P A_m e^{i(m-1)\Delta\varphi} \\
 &= \pm A_0 \sqrt{R} [1 - (1-R)e^{i\Delta\varphi} - R(1-R)e^{-2i\Delta\varphi} - \dots] \\
 &= \pm A_0 \sqrt{R} \left[ 1 - (1-R)e^{i\Delta\varphi} \sum_{m=0}^{P-L} R^m e^{im\Delta\varphi} \right].
 \end{aligned}$$

Für  $p \rightarrow \infty$  (viele Reflexionen) folgt

$$\begin{aligned}
 A &= \pm A_0 \sqrt{R} \frac{1 - e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}} \\
 \Rightarrow I_R &= c \varepsilon_0 A \cdot A^* = I_0 R \frac{2 - 2 \cos(\Delta\varphi)}{1 + R^2 - 2R \cos(\Delta\varphi)} \\
 &= I_0 \frac{4R \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{(1-R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \\
 \Rightarrow I_T &= I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Führt man  $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$  ein, so erhält man die *Airy-Formeln*

$$\boxed{I_R = I_0 \frac{F \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{1 + F \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}} \quad (1.8.6)$$

und

$$\boxed{I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}}, \quad (1.8.7)$$

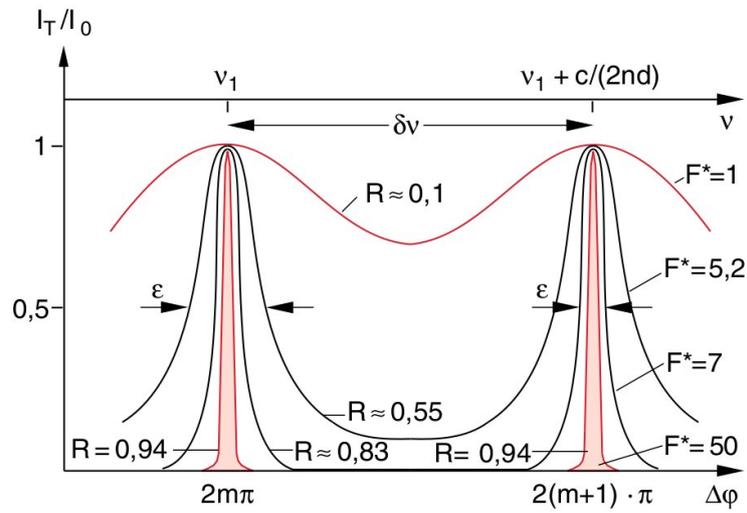
wobei

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}.$$

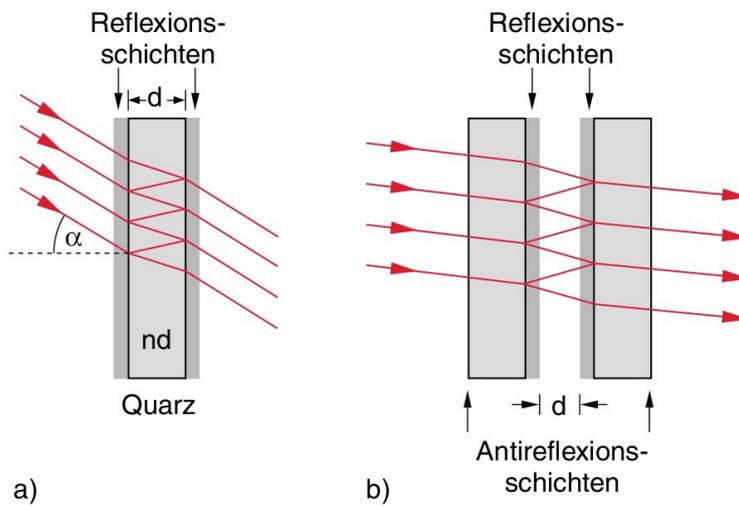
In Abbildung 1.92 ist die Airy-Formel für die Transmission geplottet. Hierbei ist  $F^*$  die „Finesse“ mit  $F^* = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$ . Die Durchlasscharakteristik der Platte wird immer schärfer „gepeakt“ um Werte  $\Delta\varphi = 2m\pi, (2m+1)\pi, \dots$ , je höher das Reflexionsvermögen  $R$  ist. Die *Halbwertsbreite*  $\varepsilon$  der Durchlasskurve ist

$$\varepsilon = \frac{4}{\sqrt{F}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}. \quad (1.8.8)$$

Für hohes  $R(\rightarrow 1)$  kann man die Wellenlängenänderung in Gleichung (1.8.5), die benötigt wird, um von hell auf dunkel zu kommen, sehr viel kleiner sein, als beim Zweistrahl-Interferometer à la Michelson.



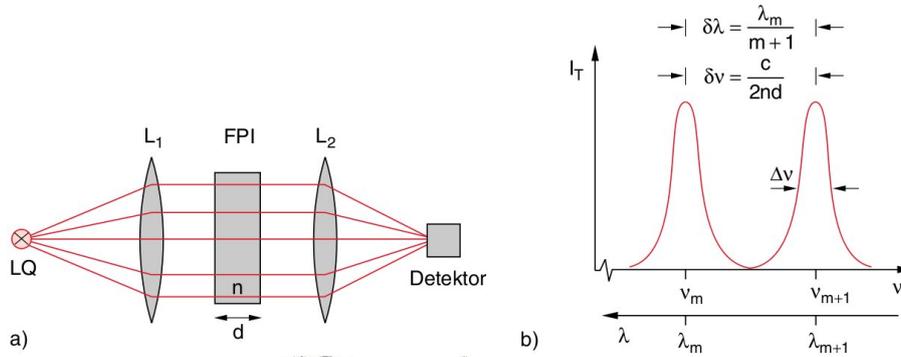
**Abbildung 1.92:** Transmission  $T = \frac{I_T}{I_0}$  einer planparallelen Platte bei senkrechtem Lichteinfall als Funktion der Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  für verschiedene Werte des Reflexionsvermögens  $R$ .



**Abbildung 1.93:** a),b) Fabry-Pérot-Interferometer. a) Beidseitig verspiegeltes Etalon, b) zwei einseitig verspiegelte Platten, deren Rückseiten entspiegelt sind.

### 1.8.4 Fabry-Pérot-Interferometer

Der Aufbau eines Fabry-Pérot-Interferometers wird in Abbildung 1.93 veranschaulicht. Das paralleles Licht zum Durchgang durch das Fabry-Pérot-Interferometer wird durch eine Linse  $L_1$  erzeugt, es wird danach durch eine Linse  $L_2$  auf den Detektor fokussiert (cf. Abbildung 1.94). Betrachte zunächst senk-



**Abbildung 1.94:** a),b) Transmission eines parallelen Lichtbündels durch ein Fabry-Pérot-Interferometer. a) Experimentelle Anordnung, b) transmittierte Intensität.

rechten Einfall ( $\alpha = 0$ ) bei einem Etalon (Abbildung 1.93 a)). Es gilt

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \overset{\text{Etalon}}{=} \frac{4\pi}{\lambda} n \cdot d.$$

Es tritt also maximal Transmission für gewisse Wellenlängen  $\lambda_m$  mit  $\Delta s = m \cdot \lambda_m \hat{=} \lambda_m = \frac{2nd}{m}$  auf (cf. Abbildung 1.94 b)). Es folgt

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \lambda_m - \lambda_{m+1} = \frac{2nd}{m} - \frac{2nd}{m+1} \\ &= \frac{2nd}{m(m+1)} = \frac{\lambda_m}{m+1}. \end{aligned} \tag{1.8.9}$$

Man nennt  $\delta\lambda$  den freien Spektralbereich („free spectral range“ FSR). Mit  $\nu_m = \frac{c}{\lambda_m}$  folgt

$$\delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c_0}{2nd}. \tag{1.8.10}$$

Damit kann man auf die Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  der Linie  $I_T(\nu_m)$  schließen. Es gilt  $I_T(\nu_1) = I_T(\nu_2) = \frac{1}{2} I_T(\nu_m)$  (cf. Abbildung 1.95). Setzt man dies in die Airy-Formel (1.8.7) ein, so folgt mit  $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$

$$\Delta\nu = \frac{2}{\pi} \frac{\delta\nu}{\sqrt{F}} = \frac{c}{2nd} \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}.$$

Man definiert die „Finesse“ des Fabry-Pérot-Interferometers als

$$F^* = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}. \tag{1.8.11}$$

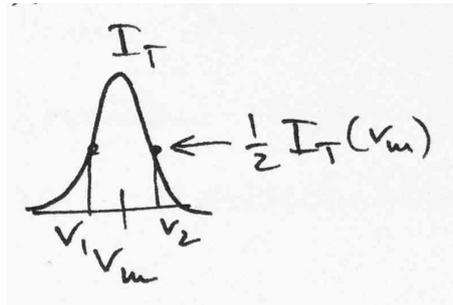


Abbildung 1.95: Halbwertsbreite der Intensität beim Fabry-Pérot-Interferometer.

Die Finesse ist ein Maß für die spektrale Auflösung des Fabry-Pérot-Interferometers. Für  $R \rightarrow 1$  wird  $F^*$  sehr groß, da immer mehr Reflexionen höherer Ordnung beitragen, die Transmission nimmt allerdings ab.

Diskutieren wir nun das Luft Fabry-Pérot-Interferometer (Abbildung 1.93 b)). Es gilt  $\lambda_m = \frac{2d}{m}$ ;  $\delta\nu = \frac{c}{2d}$  für den freien Spektralbereich. Für die Wellenlänge  $\lambda_0$  kommt es zu uniaxialer Transmission, wenn  $\lambda_0 = \frac{2d}{m}$ . Dies erreicht man durch Änderung von  $d$ , in jeder Ordnung  $m$  ist  $\lambda \sim d$ .

### 1.8.5 Kohärenz

#### Bemerkung:

- Kohärenz ist ein äußerst wichtiger Begriff, der in vielen Gebieten der Physik eine zentrale Rolle spielt (z.B. Elektronen in Festkörpern, gesamte Quantenmechanik, Astronomie, Laser, etc. pp.).
- Es gibt viele Definitionen von Kohärenz, (die in der Physik natürlich äquivalent sind).
- Neben Kohärenz als Eigenschaft des Wellenfeldes wird auch „Inkohärenz“ definiert werden, bzw. „partielle Kohärenz“, es ist also die Einführung eines Kohärenzgrades  $V$  (in der Optik auch „Kontrast“ genannt) sinnvoll. Er ist ein Maß für die Kohärenz: (inkohärent)  $0 \leq V \leq 1$  (kohärent).

#### Definition:

Ein kohärentes Wellenfeld liegt genau dann vor, wenn die Sender phasenstarr sind. Das *Interferenzmuster* „überlebt“ das Zeitmittel.

Verschieben von  $S_1$  gegen  $S_2$  verschiebt die Orte der konstruktiven bzw. destruktiven Interferenz. Äquivalent dazu ist: Eine Veränderung von  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , d.h. der relativen Phase der beiden Wellen verschiebt die Orte, das Interferenzmuster überlebt also *nicht* das Zeitmittel. Es folgt: *inkohärente* Wellenfelder liegen genau dann vor, wenn nicht phasenstarre Sender vorhanden sind. Das Interferenzmuster *ändert sich zeitlich*, überlebt das zeitliche Mittel also *nicht*, falls die Mittelungszeit  $T \gg t_c$ .

Ein abstrahlendes Atom emittiert einen Wellenpuls (cf. Abbildung 1.96). Die Lichtpulse der Länge  $t_c$  haben eine Frequenzbreite  $\Delta\nu = \frac{1}{t_c}$ . Atome emittieren (in einer Lampe) auf unkorrelierte Weise. Innerhalb  $t_c$  werden die verschiedenen Wellen interferieren, da die Wellen phasenstarr sind.

#### Beispiel:

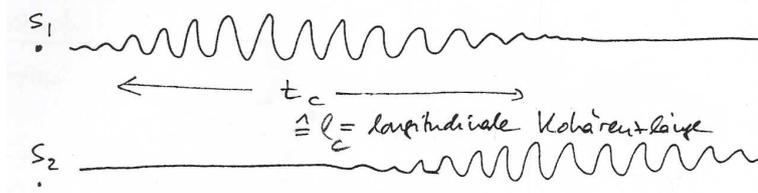


Abbildung 1.96: Zwei Wellenpakete von unterschiedlichen Quellen

Wir betrachten zwei Wellen,  $E_1$  und  $E_2$  mit  $E = E_1 + E_2$ . Es gilt

$$\langle I \rangle_t = \int_0^T I(t) dt = \langle I_1 \rangle_t + \langle I_2 \rangle_t + \underbrace{\langle c \varepsilon_0 E_1^0 E_2^0 \cos(\Delta\varphi) \rangle_t}_*$$

Für  $T \ll t_c$  ist  $\Delta\varphi = \text{konst.}$ , d.h.  $* \neq 0$  (kohärent). Für  $T \gg t_c$  ist  $\Delta\varphi$  variabel mit  $0 \leq \Delta\varphi(t) \leq 2\pi$  und somit ist  $* = 0$  (inkohärent).

$$\text{inkohärent} \hat{=} \langle I \rangle_t = \langle I_1 \rangle_t + \langle I_2 \rangle_t$$

Der Lichtstrahl kann also zeitlich und räumlich partiell kohärent sein (cf. Abbildung 1.97).

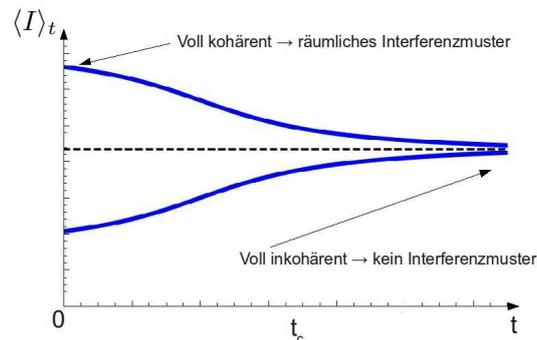


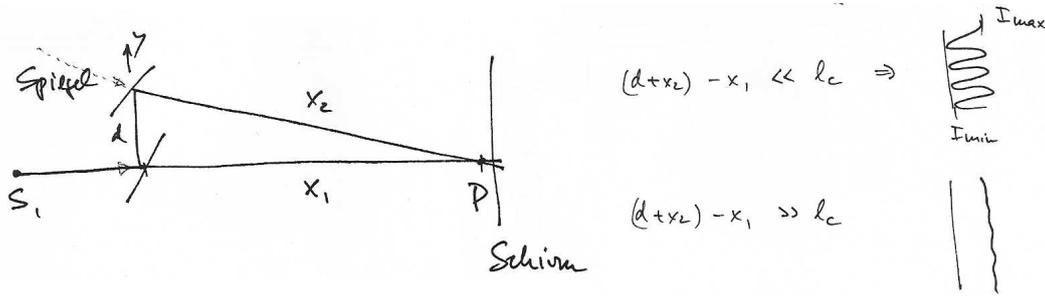
Abbildung 1.97: Partielle Kohärenz.

**Versuch:**

Betrachte Abbildung 1.98. Man verschließt den Spiegel entlang  $y$  und überlagert die beiden Strahlen in  $P$ . Für  $(d + x_2) - x_1 \ll l_c$  erhält man ein Interferenzbild, für  $(d + x_2) - x_1 \gg l_c$  erhält man keine erkennbaren Maxima. Man kann nun den Kontrast  $V$  definieren durch

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \tag{1.8.12}$$

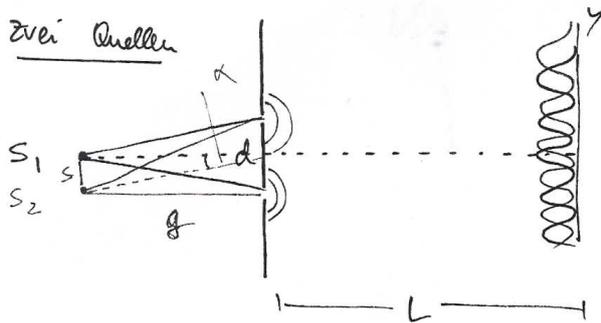
Der Kontrast  $V$  ist ein Maß für die Kohärenz von Strahlen.



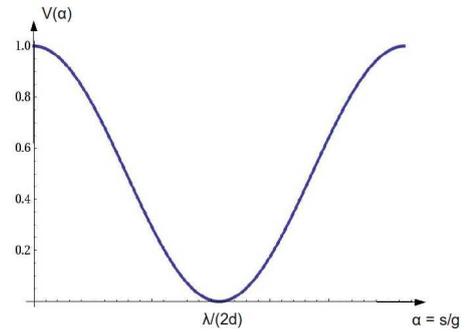
**Abbildung 1.98:** Ein Strahl wird über einen Strahlteiler geteilt und mittels eines Spiegels wieder auf den selben Punkt auf einem Schirm projiziert. Rechts sind die entstehenden Interferenzbilder zu sehen.

**Transversale Kohärenz, Kohärenzfläche** Hierzu ist der Young'sche Doppelspaltversuch interessant.

- Zwei Quellen:  
 Betrachte [Abbildung 1.99](#). Hierbei strahle die Quelle 1 rotes Licht und die Quelle 2 blaues Licht ab. Es gilt  $I_{\text{rot}}(y) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{y d \pi}{L \lambda}\right)$  und  $I_{\text{blau}}(y) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{(y-y_0) d \pi}{L \lambda}\right)$  mit  $\frac{y_0}{L} = \tan(\alpha) = \frac{s}{g} \approx \alpha$ . Der Kontrast ist in [Abbildung 1.100](#) dargestellt.



**Abbildung 1.99:** Young'scher Doppelspaltversuch mit zwei Quellen.



**Abbildung 1.100:** Kontrastverteilung beim Versuch aus [Abbildung 1.99](#).

- viele Quellen:  
 Die Situation ist in [Abbildung 1.101](#) skizziert. [Abbildung 1.102](#) zeigt den Kontrast in Abhängigkeit von  $s$ . Der Spaltabstand, die Größe der Quelle und die Wellenlänge bestimmen die transversale Kohärenzlänge. [Abbildung 1.103](#) zeigt die Abnahme des Kontrastes mit zunehmender Größe  $S$  der Quelle.

Das Kohärenzvolumen einer optischen Quelle, die durch eine abbildende Optik betrachtet wird (cf. [Abbildung 1.104](#)) wird von den Eigenschaften der Quelle (Atom-Lebensdauer bestimmt) in  $l_C$  und durch die Eigenschaften der Optik (Blendenöffnung, Abstand) in  $l_T$ .

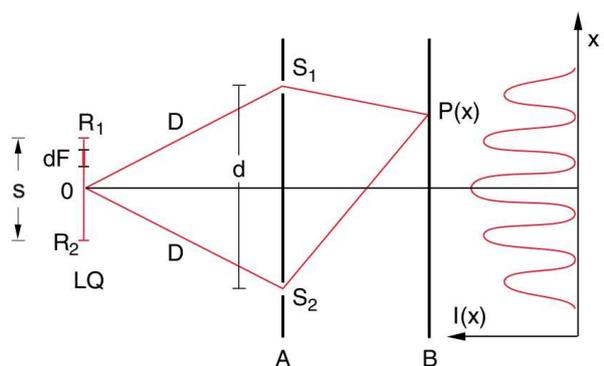


Abbildung 1.101: Skizze des Young'schen Doppelspaltversuchs mit vielen Quellen.

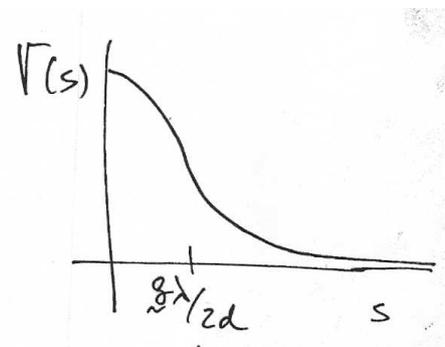


Abbildung 1.102: Kontrast beim Young'schen Doppelspaltversuch mit vielen Quellen.

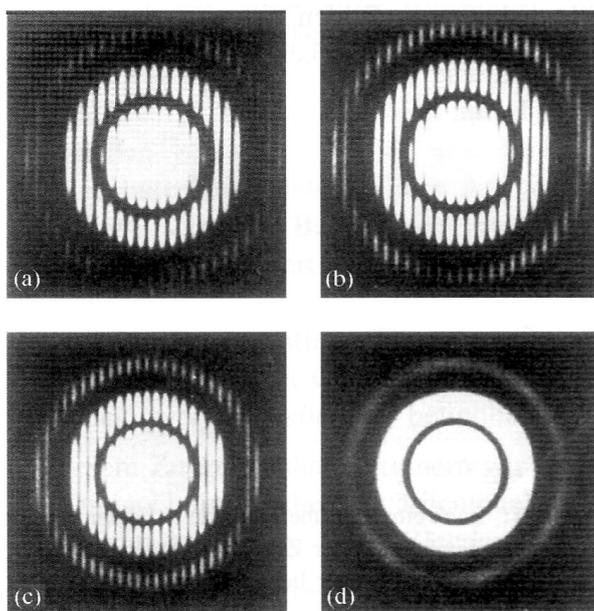


Abbildung 1.103: Zweistrahinterferenz an zwei kreisrunden Blenden. a) Die Blenden werden mit He-Ne-Laserlicht beleuchtet. b) Beleuchtung mit Laserlicht, zusätzlich ist eine Öffnung mit einer 0,5 mm dicken Glasplatte abgedeckt. c) Beleuchtung mit einem parallelen Strahlenbündel aus einer Quecksilber-Bogenlampe. d) Beleuchtung mit Quecksilberlicht; durch die Einführung der Glasplatte verschwindet nun das Interferenzmuster.

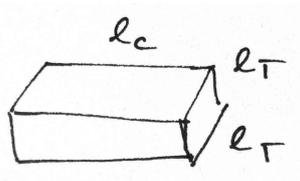


Abbildung 1.104: Das Kohärenzvolumen.

## 1.9 Beugung

Beugung ist ein Interferenzphänomen, das immer auftritt, wenn eine Welle durch eine Kante, Blende o.ä. an der freien Ausbreitung gehindert wird. Nahe an der Kante ist das gebeugte Wellenfeld kompliziert (cf. Fresnel-Optik, Fresnel-Zonen), soll hier aber nicht behandelt werden. Wir beschränken uns auf das Fernfeld (so genannte Fraunhofer-Beugung), also die Intensität auf einem entfernten Schirm (cf. Abbildung 1.105).

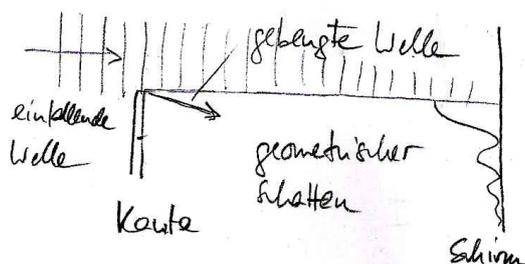


Abbildung 1.105: Fraunhofer-Beugung um eine Kante.

### 1.9.1 Einzelspalt

Betrachte  $N$  punktförmige enge Spalte mit Abstand  $d$  (cf. Abbildung 1.106) auf einer Linie. Die Phasenverschiebung der Felder benachbarter Spalte ergibt sich somit zu

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin(\alpha). \quad (1.9.1)$$

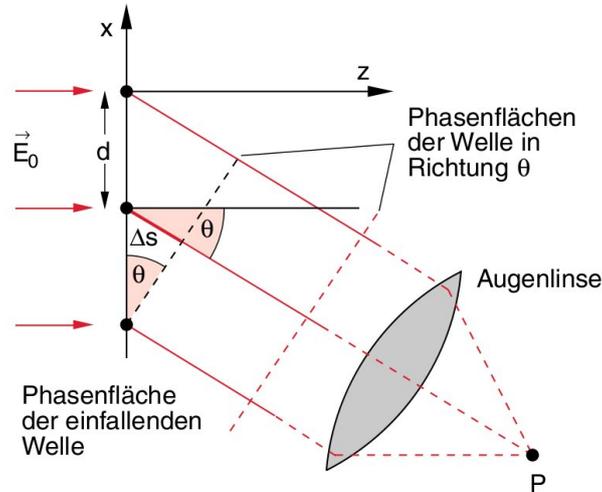


Abbildung 1.106: Zur Herleitung von 1.9.1.

Wenn jeder Spalt gleiche Amplitude  $A$  des  $E$ -Feldes emittiert, ist das Gesamtfeld (ohne zeitabhängige Terme  $e^{i\omega t}$ )

$$\begin{aligned}
 E &= A \sum_{j=1}^N e^{i\varphi_j} = A \underbrace{\sum_{j=1}^N e^{i(j-1)\Delta\varphi}}_{\text{geom. Reihe}} \quad |\varphi_1 \equiv 0 \\
 &= A \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1} = A e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi} \frac{e^{i\frac{N}{2}\Delta\varphi} - e^{-i\frac{N}{2}\Delta\varphi}}{e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}}} \\
 &= A e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Für die Intensität gilt dann mit  $I_0 = c\varepsilon_0 A^2$

$$\begin{aligned}
 I &= c\varepsilon_0 |E|^2 \\
 &= I_0 \frac{\sin^2\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}.
 \end{aligned}$$

Im Grenzfall  $d < \lambda$  mit kleinen Winkeln  $\alpha$ , d.h.  $\sin(\alpha) \approx \alpha \ll 1 \Rightarrow \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\alpha) \ll 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) &= N^2 I_0 \frac{\overbrace{\sin^2\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \cdot \alpha\right)}^x}{N^2 \pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \alpha^2} \\
 &= N^2 I_0 \cdot \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

Die Funktion  $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$  ist nur groß für  $-\pi \leq x \leq \pi$ , also  $-1 \leq \frac{Nd}{\lambda}\alpha \leq 1$  (cf. Abbildung 1.107). Die

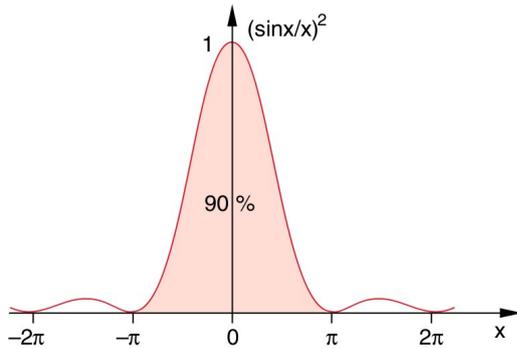


Abbildung 1.107: Die Funktion  $(\sin(x)/x)^2$ .

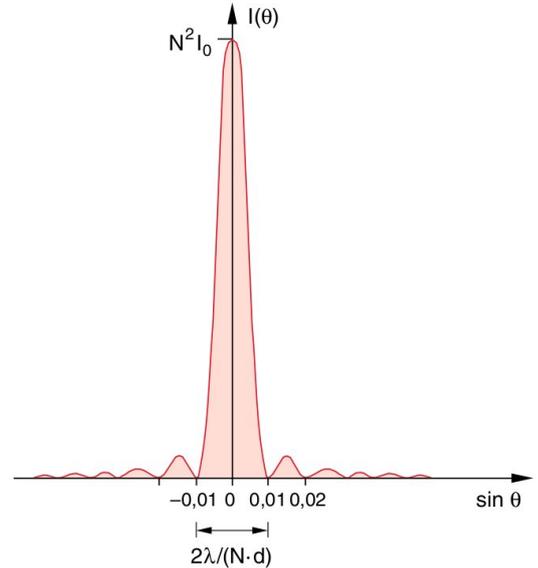


Abbildung 1.108: Die Streuintensität  $I(\theta)$  für  $d < \lambda$  und  $D = N \cdot d = 100\lambda$ . Die Fußpunktsbreite  $\Delta\alpha$  zwischen den Nullstellen von  $I(\theta)$  ist  $\Delta\theta = 2\lambda/(N \cdot d)$ .

„Breite“ der Kette von Spalten ist  $D = Nd$ . Damit ist die „Breite“ der Beugungsfigur  $\Delta\alpha \approx \frac{\lambda}{D}$  (cf. Abbildung 1.108).

**Bemerkung:**

- Je größer  $D$  ist, desto kleiner ist  $\Delta\alpha$  ( $\hat{=}$  große Länge  $\leftrightarrow$  kleine Winkel).
- Je größer  $N$ , desto größer  $I(\alpha = 0) = N^2 \cdot I_0$ .
- Lasse  $d \rightarrow 0$  gehen und gleichzeitig  $N \rightarrow \infty$ , sodass  $D = \text{konst.}$ . Das ist der homogen beleuchtete Spalt (vergleiche Abbildung 1.109 mit  $d \equiv \Delta b$ ,  $D \equiv b$ ; Abbildung 1.110 zeigt  $I(\alpha \equiv \theta)$  für verschiedene  $D \equiv b$ ).
- Dies ist die Fourier-Transformierte eines Kastens der Breite  $D$  durch

$$I(x) \xrightarrow{\text{F.T.}} I(q) \quad \text{mit} \quad q = \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta).$$

- Aus Gleichung (1.9.2) folgt die Beugungsfigur des Spalts

$$N = \frac{b}{\Delta b} = \text{Anzahl der Quellen im Spalt}$$

$$A = \frac{A_0}{N} = \text{Amplitude jeder Quelle}$$

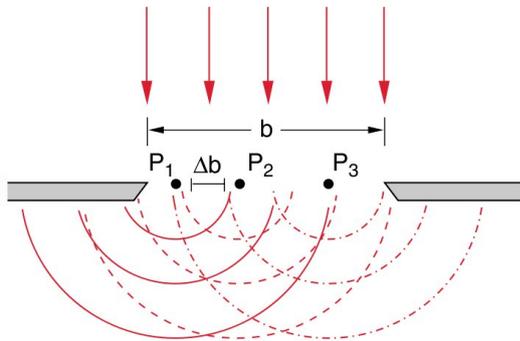


Abbildung 1.109: Beugung am Spalt.

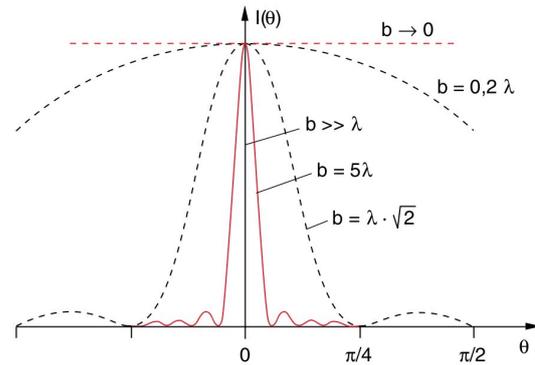


Abbildung 1.110: Intensitätsverteilung  $I(\theta)$  bei der Beugung am Spalt für verschiedene Werte des Verhältnisses  $\frac{b}{\lambda}$  von Spaltbreite  $b$  zu Wellenlänge  $\lambda$ .

$$\Rightarrow I(\theta) = I_0 \left( \frac{\Delta b}{b} \right)^2 \frac{\sin^2 \left( \pi \frac{b}{\lambda} \sin(\theta) \right)}{\sin^2 \left( \pi \frac{\Delta b}{\lambda} \sin(\theta) \right)}$$

Für  $N \rightarrow \infty$  bzw.  $\Delta b \rightarrow 0$  ( $b$  fest folgt

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left( \pi \frac{b}{\lambda} \sin(\theta) \right)}{\left( \pi \frac{b}{\lambda} \sin(\theta) \right)^2}$$

(vergleiche Abbildung 1.110). Dies entspricht der experimentell beobachteten Beugungsfigur wie man an Abbildung 1.111 erkennen kann (hier für eine Kreisblende gezeigt).

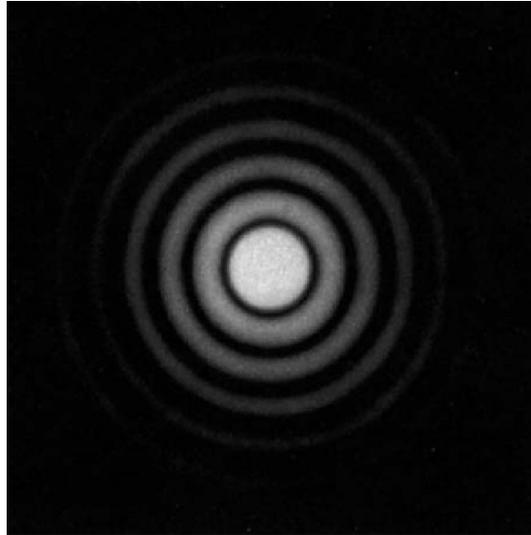
Ein anderes (ungewöhnliches) Beispiel ist die Beugung am Wassertropfen (n.b.: ein Loch im Schirm und eine absorbierende oder spiegelnde Scheibe, oder scheibenförmige kohärente Quelle ergeben die gleiche Beugungsfigur). Daher ergeben sich auch an der Rückseite des Tropfens reflektieren Strahlen (cf. Abbildung 1.112) ein Beugungsbild um die Richtung entgegengesetzt zum einfallenden Strahl (so genannte Rückstreurichtung) mit der charakteristischen Breite  $\Delta\theta = \frac{\lambda}{D}$ . Man kann diesen Effekt schön im Gebirge oder vom Flugzeug aus beobachten (Heiligenschein) um den eigenen Schatten auf einer Wolke (cf. Abbildung 1.113).

## 1.9.2 Beugung an $N$ Spalten (Gitter)

### 1.9.2.1 Gitter

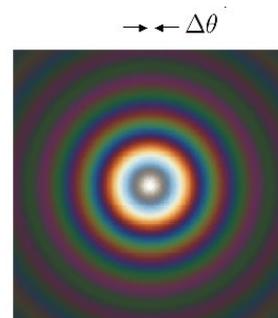
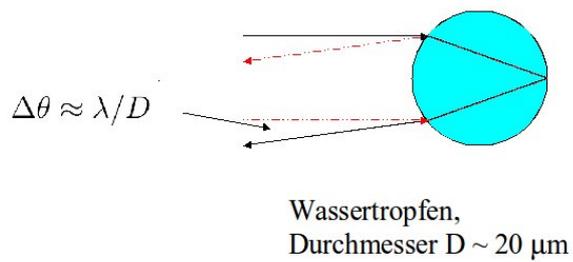
Betrachte eine ebene Welle, die senkrecht auf eine Serie von  $N$  äquidistanten Spalten der Breite  $b$  fällt (cf. Abbildung 1.114). Es gibt zwei typische Längenskalen,  $N \cdot d =$  Gesamtbreite des beugenden Objekts und  $b =$  Spaltbreite. Wir kennen bereits

- Die Lösung für  $N$  Spalten der Breite  $b \rightarrow 0$  (cf. Abbildung 1.108),
- die Lösung für einen Spalt der Breite  $b$ .



**Abbildung 1.111:** Ringförmige Beugungsstruktur hinter einer Kreisblende, die mit parallelem Licht beleuchtet wird.

### Heiligenschein ("Glory")



**Abbildung 1.112:** Beugung am Wassertropfen



Abbildung 1.113: „Heiligenschein“ um den eigenen Schatten

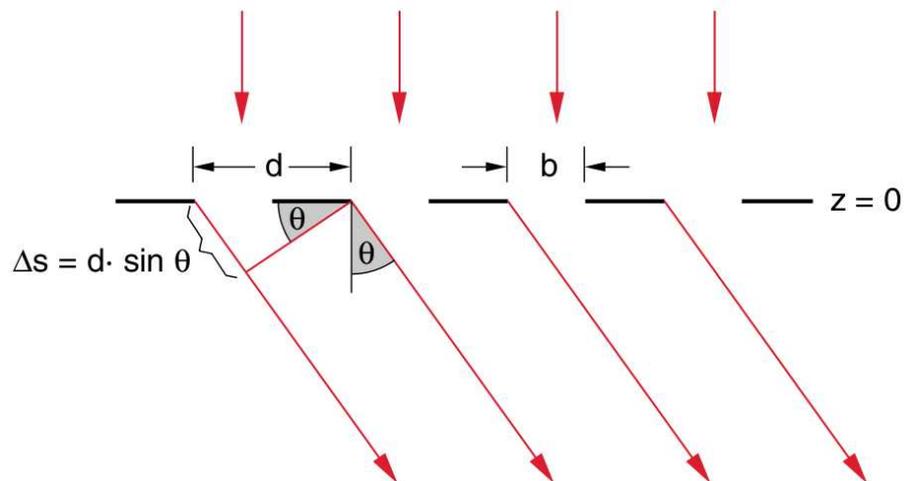
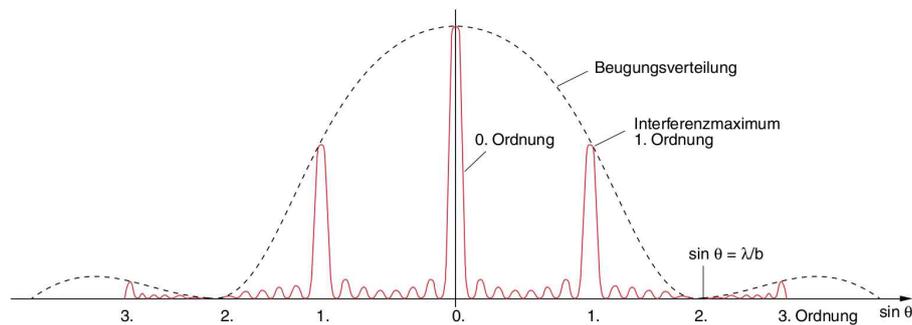


Abbildung 1.114: Beugungsgitter aus  $N$  parallelen Spalten, das senkrecht von einer ebenen Lichtwelle beleuchtet wird.

Diese beiden Lösungen überlagert ergeben jetzt die gesuchte Lösung, da die gebeugten Felder superponieren. (Vergleiche auch Faltungstheorem der Fouriertransformation, Abschnitt 1.10.3). Es gilt also für die Intensität, am Ort auf dem Schirm, den man unter dem Winkel  $\vartheta$  sieht

$$I(\vartheta) = I_0 \underbrace{\frac{\sin^2\left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin(\vartheta)\right)}{\left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin(\vartheta)\right)^2}}_{\text{Einzelspalt der Breite } b} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\vartheta)\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\vartheta)\right)}}_{\text{Gitter aus } N \text{ Spalten der Breite } Nd}. \quad (1.9.3)$$

Da  $b \ll Nd$ , ist die Beugung am Einzelspalt viel Breiter (im Winkelbereich) als die Beugung am Gesamtobjekt. Abbildung 1.115 zeigt das Beugungsmuster. Die Einhüllende kommt vom Einzelspalt, die scharfen



**Abbildung 1.115:** Intensitätsverteilung  $I(\theta)$  bei einem Beugungsgitter mit acht Spalten, bei dem  $d/b = 2$  ist. In die zweiten Interferenzordnung gelangt wegen des Beugungsminimums kein Licht.

Spitzen von der Breite  $Nd$ , die kleinen Nebenmaxima von der Zahl  $N$  der Spalten.

### 1.9.2.2 Reflexionsgitter

Das Reflexionsgitter (cf. Abbildung 1.116) erzeugt ein ähnliches Beugungsmuster wie die  $N$  Spalten. Wir haben die Periode  $d$  (wie vorher), die Beugung des Einzelobjekts ist ein wenig anders als die Beugung des Einzelspalts, da die Phasenverschiebung der gebeugten Wellen wegen der schrägen Orientierung der reflektierenden Schicht und wegen des schrägen Einfalls der Primärwelle anders sind. Nach Abbildung 1.116 ist der Gangunterschied der beiden Strahlen

$$\Delta s = d(\sin(\alpha) + \sin(\beta)) = m\lambda \quad (1.9.4)$$

mit  $b < 0$ . Man erhält konstruktive Interferenz, also ein Intensitätsmaximum, wenn  $m \in \mathbb{N}$ , also  $\Delta s = m \cdot \lambda$ . Innerhalb jeder Ordnung  $m$  wird das Licht spektral zerlegt, d.h. der Ablenkwinkel bezüglich der Einfallrichtung ( $\alpha + \beta$ ) hängt von  $\lambda$  ab.

In der Vorlesung wurde vorgeführt, wie ein Gitter, das mit weißem Licht bestrahlt wurde, Farbmuster in jeder Ordnung erzeugt.

Der *Blazewinkel*  $\vartheta$  bewirkt, dass mehr Licht als beim „ $N$ -Spalten-Fall“ in eine gegebene Ordnung fällt. Dies ist von Interesse, da im so genannten Gittermonochromator (cf. Abbildung 1.117) nur eine Ordnung (meist die erste) zur spektralen Zerlegung verwendet wird. Betrachte zur Herleitung des Blazewinkels

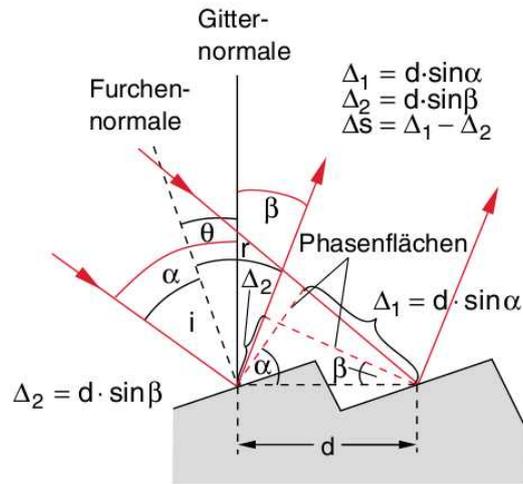


Abbildung 1.116: Optisches Reflexions-Beugungsgitter.

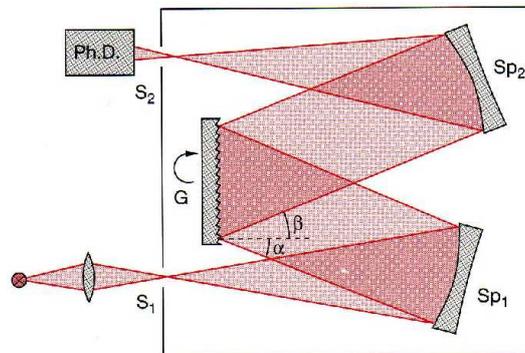


Abbildung 1.117: Gittermonochromator (Ph.D. = Photodetektor).

nochmals Abbildung 1.116. Aus dem Reflexionsgesetz folgt  $r = i$ , aus Zerlegung erhält man  $r = \vartheta - \beta$ ,  $i = \alpha - \vartheta$ . Es folgt also insgesamt

$$\vartheta = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Der Winkel  $\alpha$  ist konstant (konstruktionsbedingt im Monochromator), der Winkel  $\beta$  ist konstant für gegebenes  $d$ ,  $\lambda$  und Gitterbedingung ( $\Delta s = m\lambda$ , Ordnung  $m$ ). Mit (1.9.4) folgt für den optimalen Blazewinkel

$$\vartheta = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d} - \sin(\alpha)\right) = \vartheta(\lambda).$$

$\vartheta$  wird so gewählt, dass der reflektierte Strahl und der in Ordnung  $m$  bei typischer Wellenlänge  $\lambda$  gebeugte Strahl übereinanderfallen.

## 1.10 Mathematischer Einschub: Fouriertransformationen

**Motivation:** Ebene, monochromatische Felder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re(\vec{E}_0 e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)})$$

sind spezielle Lösungen der Maxwell-Gleichungen. Nun geht es darum, in wieweit die Diskussion der ebenen, monochromatischen Wellen ausreicht, um allgemeine Felder zu beschreiben. Wir werden finden, dass man durch eine Linearkombination (Superposition) solcher Felder ein beliebiges Feld  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  darstellen kann.

### 1.10.1 Definition der Fouriertransformation (FT)

Sei  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$  ein Vektor im  $d$ -dimensionalen Raum und sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto f(\vec{x})$  eine komplexwertige Funktion, die stückweise stetig und absolut integrierbar ist, d.h.

$$\int d^d x |f(\vec{x})| < \infty \quad (1.10.1)$$

Mit einem konstanten Vektor  $\vec{k} \in \mathbb{R}^d$  ist die ( $d$ -dimensionale) Fourier-Transformation der Funktion  $f$  definiert durch

$$\tilde{f}(\vec{k}) := \int_{\mathbb{R}^d} d^d x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}). \quad (1.10.2a)$$

**Bemerkung:** Elementare Eigenschaften

- Die Fourier-Transformation ist eine lineare Abbildung  $f \rightarrow \tilde{f} = \text{FT}[f(\vec{x})](\vec{k})$ . Seien  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  konstant. Dann gilt also

$$\text{FT}[\lambda_1 f_1(\vec{x}) + \lambda_2 f_2(\vec{x})](\vec{k}) = \lambda_1 \tilde{f}_1 + \lambda_2 \tilde{f}_2.$$

- Es gilt

$$(\tilde{f}(\vec{k}))^* = \tilde{f}(\vec{k})^* = \int d^d x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f^*(\vec{x}) = \tilde{f}^*(-\vec{k}).$$

- Falls  $f$  reell ist, d.h.  $f(\vec{x})^* = f(\vec{x})$ , gilt

$$(\tilde{f}(\vec{k}))^* = \tilde{f}(-\vec{k})$$

- Falls  $f(\vec{x})$  (antisymmetrisch) symmetrisch, d.h.  $f(-\vec{x}) = \pm f(\vec{x})$ , so gilt  $\tilde{f}(\vec{k}) = \pm \tilde{f}(-\vec{k})$ .

**Beweis:**

Da  $-\vec{x}' = \vec{x}$  gilt  $d^d x = (-1)^d d^d x'$  und es folgt

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \pm \int d^d x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(-\vec{x}) = \pm \tilde{f}(-\vec{k}) = \pm \int d^d x^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}).$$

- **Verschiebungssätze:**

Mit  $\vec{a}$  als festen Vektor und Variablensubstitution im Integral  $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$  gilt

$$\begin{aligned} \text{FT}[f(\vec{x} + \vec{a})](\vec{k}) &= e^{-i\vec{k}\cdot\vec{a}} \tilde{f}(\vec{k}), \\ \text{FT}[e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} f(\vec{x})](\vec{k}) &= \tilde{f}(\vec{k} + \vec{p}). \end{aligned}$$

**Beispiel:** Gauß-Funktion

Wir betrachten hier  $f_G(\vec{x}) = e^{-\gamma x^2} = e^{-\gamma(x_1^2 + \dots + x_d^2)}$  mit  $\Re(\gamma) > 0$ .

$$\begin{aligned} \tilde{f}_G(\vec{k}) &= \int d^d x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-\gamma x^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{ik_1 x_1 - \gamma x_1^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{ik_2 x_2 - \gamma x_2^2} \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx_d e^{ik_d x_d - \gamma x_d^2} \end{aligned}$$

Nebenrechnung: (Eindimensional)

$$\begin{aligned} f_{G1}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \gamma x^2} \\ \frac{\partial}{\partial k} \tilde{f}_{G1}(k) &\stackrel{\text{abs.int.}}{=} \int dx \partial_k e^{ikx} f_{G1}(x) \\ &= \int dx i x e^{ikx - \gamma x^2} \\ &= \int dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \underbrace{e^{ikx - \gamma x^2}}_* \right) \cdot \left( \frac{-i}{2\gamma} \right) - \frac{k}{2\gamma} e^{ikx - \gamma x^2} \end{aligned}$$

\* (Randterme) gibt integriert 0, da  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{ikx - \gamma x^2} \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} &= \frac{-k}{2\gamma} \tilde{f}_{G1}(k) \\ \Rightarrow \partial_k \tilde{f}_{G1}(k) + \frac{k}{2\gamma} \tilde{f}_{G1}(k) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$\tilde{f}_{G1}(k) = A e^{-\frac{k^2}{4\gamma}},$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= \tilde{f}_{G1}(k=0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\gamma x^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \end{aligned}$$

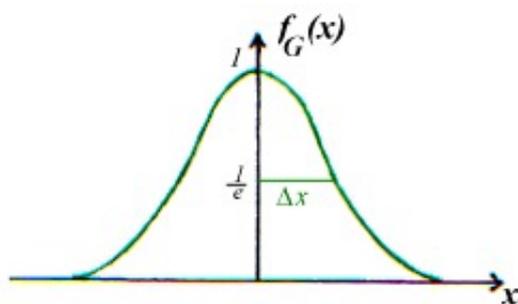


Abbildung 1.118: Gauss-Glockenkurve

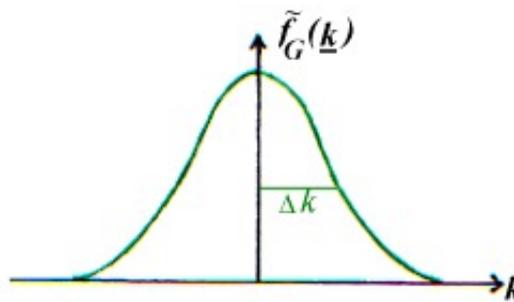


Abbildung 1.119: Fourier-transformation am Beispiel einer Gauss-Glocke;  $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ . In der transformierten Kurve ist das Maximum bei  $\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$  und im Abstand  $\Delta k = 2\sqrt{\gamma}$  ist die Funktion  $\tilde{f}$  bei  $\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \frac{1}{e}$ .

Multidimensional:

$$\Rightarrow \tilde{f}_G(\vec{k}) = \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\vec{k}^2}{4\gamma}}$$

Dies ist wiederum eine Gauss-Glocke (Spezialfall!)

**Bemerkung:**

Die Breiten  $\Delta x$  und  $\Delta k$  sind umgekehrt proportional  $\Delta x \cdot \Delta k = 2$  (unabhängig von  $\gamma$ ).

### 1.10.2 Differentiation und Multiplikation

#### 1.10.2.1 Differentiation

Sei  $f(\vec{x})$  nach  $x_i$  (partiell) differenzierbar, und  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) = \partial_{x_i} f(\vec{x}) = \partial_i f(\vec{x})$  existiere und sei auch absolut integabel. Dann gilt

$$\boxed{\text{FT}[\partial_{x_i} f(\vec{x})](\vec{k}) = -i k_i \tilde{f}(\vec{k})}. \tag{1.10.3}$$

**Beweis:** Betrachte

$$\int d^d x e^{i\vec{k}\vec{x}} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) \stackrel{\text{part. Int.}}{=} - \int d^d x f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} e^{i\vec{k}\vec{x}}.$$

Die „+“-Randterme werden im Unendlichen = 0, da  $f(|x|) \rightarrow 0$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) damit  $f$  absolut integrierbar ist. Wir haben also

$$\begin{aligned} \text{FT}[\partial_{x_i} f(\vec{x})](\vec{k}) &= -i k_i \int d^d x e^{i\vec{k}\vec{x}} f(\vec{x}) \\ &= -i k_i \tilde{f}(\vec{k}). \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. Analog gilt

$$\text{FT}[\partial_i \partial_j f(\vec{x})](\vec{k}) = (-i k_i)(-i k_j) \tilde{f}(\vec{k}) \quad \text{etc. pp.}$$

### **Nutzen der Fourier-Transformation:**

Differentiation (nach  $\vec{x}$ ) im Urbildraum wird zu Multiplikation (mit  $\vec{k}$ ) im Fourier-Raum. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \text{FT}[\text{grad} f(x) = \nabla f(x)](\vec{k}) &= -i \vec{k} \tilde{f}(\vec{k}) \\ \text{FT}[\text{div} \vec{B}(x) = \nabla \cdot \vec{B}(x)](\vec{k}) &= -i \vec{k} \cdot \tilde{\vec{B}}(\vec{k}) \\ \text{FT}[\text{rot} \vec{B}(x) = \nabla \times \vec{B}(x)](\vec{k}) &= -i \vec{k} \times \tilde{\vec{B}}(\vec{k}) \\ \text{FT}[\Delta f(x) = \nabla^2 f(x)](\vec{k}) &= -k^2 \tilde{f}(\vec{k}) \end{aligned}$$

#### 1.10.2 Multiplikation

Falls  $|\vec{x}|^n f(\vec{x})$  absolut integrierbar ist, kann man

$$\text{FT}[e^{i\vec{p}\vec{x}} f(\vec{x})](\vec{k}) = \tilde{f}(\vec{k} + \vec{p})$$

verwenden. Wir führen für beide Seiten (LS und RS) der Gleichung eine Taylor-Entwicklung durch und erhalten

$$\begin{aligned} \text{LS} &= \int d^d x \sum_n \frac{i^n}{n!} (\vec{x}\vec{p})^n e^{i\vec{k}\vec{x}} f(\vec{x}) \\ \text{RS} &= \tilde{f}(\vec{k}) + \vec{p} \frac{\partial \tilde{f}(\vec{k})}{\partial \vec{k}} + \frac{1}{2} \left( \vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \right)^2 \tilde{f}(\vec{k}) + \dots \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Potenzen in  $\vec{p}$  erhält man

$$\text{FT}[\vec{x} f(\vec{x})](\vec{k}) = -i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \vec{k}} \quad \text{etc. pp.}$$

#### 1.10.3 Faltungstheorem

Sei

$$h(\vec{x}) = \int d^d y g(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y})$$

$h$  heißt Faltung von  $g$  mit  $f$  (im Ortsraum). Mit  $\vec{y}' = \vec{x} - \vec{y}$  erkennt man die Symmetrie

$$h(\vec{x}) = \int d^d \vec{y}' g(\vec{y}') f(\vec{x} - \vec{y}').$$

Dann gilt

$$\tilde{h}(\vec{k}) = \tilde{g}(\vec{k}) \tilde{f}(\vec{k}).$$

Eine Faltung im Ortsraum wird zum Produkt im FT-Raum.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\vec{k}) &= \int d^d x \int d^d y e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} g(\vec{x}-\vec{y}) e^{i\vec{k}\vec{y}} f(\vec{y}) \\ &= \int d^d \vec{\zeta} \int d^d y e^{i\vec{k}\vec{\zeta}} g(\vec{\zeta}) e^{i\vec{k}\vec{y}} f(\vec{y}) \\ &= \tilde{g}(\vec{k}) \cdot \tilde{f}(\vec{k}) \end{aligned}$$

wobei gilt  $\vec{\zeta} = \vec{x} - \vec{y}$ . Für die Jakobi-Matrix der Integrationsvolumina gilt

$$J = \frac{\partial(\vec{y}, \vec{\zeta})}{\partial(\vec{x}, \vec{y})} = 1.$$

Da hier über den ganzen Raum integriert wird, also die Integrationsgrenzen „ $\infty$ “ sind, bleiben die Integrationsgrenzen.

**Bemerkung:**

Die Dispersion  $\varepsilon(\omega)$  und die Formel  $\boxed{\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)}$  ist eine Anwendung davon; gilt im Fourier-Raum (Frequenz-Raum) nach Fourier-Transformation über die Zeit.

## 1.10.4 Umkehrung der Fourier-Transformation und Parseval-Gleichung

### 1.10.4.1 Umkehrung der Fourier-Transformation

Idee: Verwende die Abbildung  $\tilde{f}_G(\vec{k} - \vec{p})$ , mit

$$f_G(\vec{x}) = e^{-\gamma x^2},$$

als „Dirac- $\delta$ -Funktion“ für  $\gamma \rightarrow 0$  mit einer Faltung (cf. Abbildung 1.120).  $\tilde{f}_G(\vec{k} - \vec{p})$  ist gegeben durch

$$\tilde{f}_G(\vec{k} - \vec{p}) = \text{FT} [e^{-i\vec{p}\vec{x}} f_G(\vec{x})] (\vec{k}),$$

da  $f_G(\vec{x}) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 1$ . Zum weiten Vorgehen benötigen wir den folgenden

**Hilfs-Satz:**

$$\int d^d u \tilde{f}_1(\vec{u}) f_2(\vec{u}) = \int d^d v f_1(\vec{v}) \tilde{f}_2(\vec{v}). \quad (1.10.4)$$

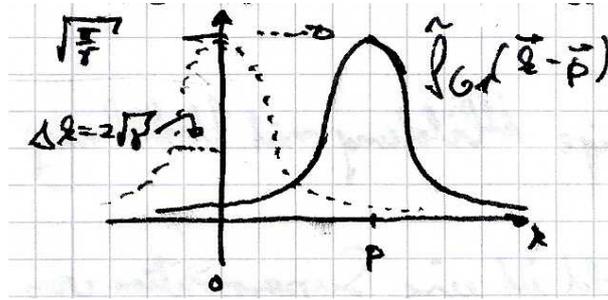


Abbildung 1.120: Zur Idee für die Rechnung zur Umkehrung der FT.

Beweis:

$$\begin{aligned} \int d^d u \tilde{f}_1(\vec{u}) f_2(\vec{u}) &= \int d^d u \left( \int d^d v e^{i\vec{u}\cdot\vec{v}} f_1(\vec{v}) \right) f_2(\vec{u}) \\ &= \int d^d u \int d^d v e^{i\vec{u}\cdot\vec{v}} f_1(\vec{v}) f_2(\vec{u}) \\ &= \int d^d v \underbrace{\int d^d u e^{i\vec{u}\cdot\vec{v}} f_2(\vec{u})}_{=\tilde{f}_2(\vec{v})} f_1(\vec{v}). \end{aligned}$$

(Damit ist natürlich insbesondere auch schon

$$\int d^d u \tilde{f}_1(\vec{u}) f_2(\vec{u}) = \int d^d u f_1(\vec{u}) \tilde{f}_2(\vec{u}).$$

gezeigt.)

Definiere

$$\begin{aligned} I &:= \int d^d u \tilde{f}_G(\vec{u} - \vec{x}) f(\vec{u}) \\ &\stackrel{\text{Hilfss.}}{\underset{\vec{v} \rightarrow \vec{k}}{=}} \int d^d k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \underbrace{f_G(\vec{x})}_{=1, \gamma \rightarrow 0} \tilde{f}(\vec{k}) \\ &= \int d^d k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}). \end{aligned}$$

Explizit ist das

$$I \underset{\vec{u} \rightarrow \vec{y}}{=} \int d^d y \underbrace{\left( \frac{\pi}{\gamma} \right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{4\gamma}}}_{\underset{\gamma \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{\tilde{f}_G(\vec{x}-\vec{y})}{(2\pi)^d \delta^d(\vec{x}-\vec{y})}} f(\vec{y}).$$

Diese Funktion hat ein starkes Maximum bei  $\vec{x} = \vec{y}$ . Nach Taylor-Entwicklung von  $f(\vec{y})$  um  $\vec{y} = \vec{x}$  erhält man

$$I = \int d^d y \left( \frac{\pi}{\gamma} \right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{4\gamma}} (f(\vec{x}) + (\vec{y} - \vec{x}) \nabla f(\vec{x}) + \dots).$$

Jetzt führen wir eine neue Integrationsvariable  $\vec{z} = \frac{\vec{y}-\vec{x}}{\sqrt{\gamma}}$  ein und erhalten (mit  $d^d z = -\frac{1}{\gamma^{d/2}} d^d y$ )

$$I = f(x) \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} \gamma^{\frac{d}{2}} \int d^d z e^{-\frac{z^2}{4}} + \nabla f(\vec{x}) \pi^{\frac{d}{2}} \sqrt{\gamma} \int d^d z \vec{z} e^{-\frac{z^2}{4}} + \mathcal{O}(\gamma)$$

$$\xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} f(x) (2\pi)^d + \underbrace{\mathcal{O}(\gamma^{1/2})}_{=0}$$

da

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4}} = \sqrt{4\pi}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$f(\vec{x}) = \text{FT}^{-1}[\tilde{f}(\vec{k})](\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \tilde{f}(\vec{k}). \tag{1.10.5}$$

**Bemerkung:**

- FT :  $f \rightarrow \tilde{f}$  ist eine eindeutige Abbildung mit

$$\text{FT} : \tilde{f} \xrightarrow{\text{FT}} f = \int d^d x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x})$$

$$\text{FT}^{-1} : \tilde{f} \xrightarrow{\text{FT}^{-1}} f = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}).$$

- Jedes beliebige (absolut integrierbare) Feld  $f(\vec{x})$  lässt sich darstellen als Superposition von Fourier-Moden  $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$  mit  $\tilde{f}(\vec{k})$  als Gewichten.
- („ $x \rightarrow r, t$ “) Jedes (absolut integrierbare) Feld kann also durch ebene monochromatische Wellen superponiert/dargestellt werden durch

$$f(\vec{r}, t) = \int \underbrace{\frac{d\omega}{2\pi}}_{\text{Zeitkomponente}} \int \underbrace{\frac{d^3 k}{(2\pi)^3}}_{\text{Ortskomponente}} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \tilde{f}(\omega, \vec{k}). \tag{1.10.6}$$

Hierbei erzwingen die Feldgleichungen (z.B. die Maxwell-Gleichungen oder die Wellen-Gleichung) die Dispersionsrelation, d.h.

$$\tilde{f}(\omega, \vec{k}) = 2\pi \delta(\omega - \omega(\vec{k})) \tilde{f}(\vec{k}). \tag{1.10.7}$$

Damit gilt

$$f(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i(\omega(\vec{k})t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \tilde{f}(\vec{k}),$$

wobei  $\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3 r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r}, t=0)$ .

- Aus diesem Grund ist es nützlich ebene monochromatische Wellen für den allgemeinen Fall zu diskutieren.

### 1.10.4.2 Parseval-Beziehung

Es gilt

$$\int d^d x f^*(\vec{x}) g(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{f}^*(\vec{k}) \tilde{g}(\vec{k}). \quad (1.10.8)$$

#### **Beweis:**

Die Aussage (1.10.8) soll mit dem oben schon eingeführten Hilfssatz (1.10.4) bewiesen werden. Wir beginnen mit der linken Seite und zeigen die Gleichheit zur rechten.

$$\begin{aligned} \int d^d x f^*(\vec{x}) g(\vec{x}) &= \int d^d \vec{k} \tilde{g}(\vec{k}) \text{FT}^{-1}[f^*](\vec{k}) \\ &= \int d^d \vec{k} \tilde{g}(\vec{k}) \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x} \cdot \vec{k}} f^*(\vec{x}) \\ &= \int d^d \vec{k} \tilde{g}(\vec{k}) \underbrace{\left( \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{x} \cdot \vec{k}} f(\vec{x}) \right)^*}_{= \frac{1}{(2\pi)^d} \tilde{f}^*(\vec{k})} \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{g}(\vec{k}) (\tilde{f}(\vec{k}))^*. \end{aligned}$$

Damit ist die Parseval-Beziehung gezeigt.

## 1.11 Mathematischer Einschub: Retardierte Green'sche Funktion der Wellengleichung

### 1.11.1 Motivation

Ziel ist es die inhomogene Wellengleichung zu lösen ( $\leadsto$  Prinzip von Huygens). Außerdem stellen Green'sche Funktionen eine nützliche Technik für Differentialgleichungen dar.

### 1.11.2 Inhomogene Wellengleichung

Betrachte im Vakuum gegebene Ströme und Ladungen.

Frage: Welche elektromagnetischen Felder werden produziert ( $\leadsto$  Ursache - Wirkung, „Kausalitätsforderung“). Die elektromagnetischen Felder folgen aus

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \dot{\vec{A}} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Mit der Maxwell-Gleichung (1.1.10) folgt

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \frac{1}{c^2} (\nabla \dot{\varphi} + \ddot{\vec{A}}) &= \mu_0 \vec{j} \\ \Rightarrow -(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2) \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} - \nabla \left( \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} + \nabla \cdot \vec{A} \right), \end{aligned} \quad (1.11.1)$$

und mit der Maxwell-Gleichung (1.1.8) gilt

$$-\nabla^2 \bar{\varphi} - \partial_t \nabla \bar{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.11.2)$$

Weil  $\varphi$  und  $\vec{A}$  nicht eindeutig sind, können wir umeichen:  $\varphi = \bar{\varphi} - \dot{\chi}$ ,  $\vec{A} = \bar{\vec{A}} + \nabla \chi$ . Wir suchen ein  $\chi$  so, dass  $\frac{1}{c^2} \dot{\varphi} + \nabla \vec{A} = 0$  (sog. Lorentz-Eichung (LE)). Dann gilt

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2\right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2\right) \nabla \chi - \nabla \left(\frac{1}{c^2} \ddot{\chi} - \nabla^2 \chi\right)}_{=0, \text{ hebt sich weg}}$$

und

$$-\nabla^2 \varphi - \partial_t \nabla A \stackrel{\text{LE}}{=} -\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \underbrace{\nabla^2 \dot{\chi} - \partial_t \nabla^2 \chi}_{=0}.$$

Man erhält also

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2\right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}, \quad (1.11.3a)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2\right) \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.11.3b)$$

die inhomogene Wellengleichung der elektromagnetischen Potentiale in Lorentz-Eichung.

**Bemerkung:**

Die Gleichung  $\frac{1}{c^2} \dot{\varphi} + \nabla \vec{A}$  schränkt die Lösung von (1.11.3) nicht ein, weil sie automatisch erfüllt ist wegen Ladungserhaltung für Lösungen von (1.11.3). Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2\right) \left(\frac{1}{c^2} \dot{\varphi} + \nabla \vec{A}\right) \\ \stackrel{(1.11.3)}{=} & \frac{1}{c^2} \partial_t \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \mu_0 \nabla j = \mu_0 \underbrace{(\dot{\rho} + \nabla j)}_{\text{Ladungserhaltung}} = 0. \end{aligned}$$

**1.11.3 Retardierte Green'sche Funktion**

Gesucht ist eine spezielle Lösung der Wellengleichung (1.11.3a), welche durch

$$\vec{A}_{\text{sp}}(\vec{r}, t) = \int d^3 r' \int dt' G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \mu_0 \vec{j}(\vec{r}', t')$$

gegeben ist. Die Lösung erhält man durch Fourier-Transformation:

$$\tilde{\vec{j}}(\omega, \vec{k}) = \int d^3 r \int dt e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{j}(\vec{r}, t).$$

Wendet man dies auf (1.11.3) an, so erhält man durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{A}}_{\text{sp}}(\omega, \vec{k}) &= \frac{1}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \left(-\mu_0 \tilde{\vec{j}}(\omega, \vec{k})\right) \\ \Rightarrow \vec{A}_{\text{sp}}(\vec{r}, t) &= \int d^3 r' \int dt' \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \frac{\mu_0}{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} e^{i(\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{r}')} \vec{j}(\vec{r}', t') \end{aligned}$$

Somit

$$G(\Delta\vec{r}, \Delta t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i(\omega\Delta t - \vec{k}\cdot\Delta\vec{r})} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad (1.11.4)$$

mit  $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$ ,  $\Delta t = t - t'$ .

**Bemerkung:**

- Superposition durch Beiträge von Punktquellen, Weil  $G$  erfüllt.

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2\right) G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t')$$

- Jede beliebige Lösung  $\vec{A}_{\text{hom}}$  der homogenen Wellengleichung kann zu  $\vec{A}_{\text{sp}}$  addiert werden, z.B. eine auslaufende Kugelwelle  $\vec{A} = \frac{A_0}{r}\varphi\left(t - \frac{r}{c}\right)$ .
- $\vec{A}_{\text{sp}}$  und  $G$  sind noch nicht eindeutig und müssen durch Randbedingungen festgesetzt werden, Zusatzbedingung:  $G \stackrel{!}{=} 0$  für  $t' > t$ .

$$\Rightarrow G(\Delta r, \Delta t) = \frac{1}{4\pi|\Delta r|} \delta\left(\Delta t - \frac{|\Delta\vec{r}|}{c}\right)$$

**Beweis:**

- Cauchy Residuensatz der Funktionentheorie.
- Heuristisch: Für  $|r' - r| > 0$  und  $t > t'$ , wo  $G$  die homogene Wellengleichung erfüllen muss, liefert Kausalität eine auslaufende Kugelwelle

$$G(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} f\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right). \quad (1.11.5)$$

Es ist aber noch die Frage, was  $f$  ist. Da  $r$  im Nenner ist, divergieren für  $r \rightarrow 0$  die Ortsableitungen stärker als andere und als die Zeitableitungen und wir benötigen

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} f\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) = -\delta^3(r)\delta(t),$$

weil  $\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} = -\delta^3(r)$ . Dies ist uns aus der Elektrostatik vertraut (cf. Aufgabe 16). Damit wird  $f$  eine Dirac- $\delta$ -Funktion:  $f\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) = \delta\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)$ , also obiges  $G$ .

Es folgt, dass die kausale Lösung der inhomogenen Wellengleichung der Elektrodynamik lautet

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \int d^2r' \int dt' \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \vec{j}(\vec{r}', t') \\ &= \mu_0 \int d^3r' \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right). \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Fernfeldnäherung für lokalisierte Quellen  $\omega_0 |\vec{r}'| < r_0$  und  $|\vec{r}| \gg r_0$  interessiert. Es gilt

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}' \cdot \vec{r}} \doteq r - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right),$$

woraus folgt

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \xrightarrow{|\vec{r}| \gg r_0} \mu_0 \frac{1}{4\pi r} \int d^3r' \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \hat{r} \cdot \frac{\vec{r}'}{c}\right).$$

Weiter Aufgabe 3 (Dipol-Feld), wo ein Modell für  $\vec{j}$  diskutiert wird.

# Kapitel 2

## Thermische Physik

### 2.1 Einleitung

Es gibt ca.  $10^{23}$  Freiheitsgrade. Da man dies rechnerisch nicht bewältigen kann, betrachtet manjh makroskopische Größen (Druck  $p$ , Volumen  $V$ , Dichte  $\rho$ , Temperatur  $T$ , spezifische Wärme  $c_p/c_v$ , Kompressibilität  $\kappa$ , Viskosität  $\eta$ , Wärmeleitfähigkeit  $\Lambda$ , etc. pp.)

Man bedient sich viel der statistischen Physik und Betrachtet Mittelwerte. Dabei werden die meisten Freiheitsgrade wegintegriert. Es verbleibt die Betrachtung der makroskopischen Größen.

**Definition:** (System)

Ein System ist eine gewisse Anzahl von Teilchen in einem Volumen, wo man dann Druck, Temperatur, etc. angeben kann, ein Ensemble von Werten.

Ein wichtiger Begriff ist der Aggregatzustand eines Systems, auch Phase genannt (flüssig, gasförmig, fest). Es kann zu Phasenübergängen kommen, die durch Änderungen der Systemparameter hervorgerufen werden.

Es gibt weitere, weniger bekannte Zustandsgrößen, wie Entropie, innere Energie, Enthalpie und chemisches Potential. Alle Zustandsgrößen sind die thermodynamischen Variablen des Systems.

Mittelwerte der thermodynamischen Variablen und Funktionen um die Mittelwerte: Thermisches Gleichgewicht  $\hat{=}$  Funktionen verändern den Mittelwert der thermodynamischen Variablen *nicht*.

#### **0. Hauptsatz der Thermodynamik**

Befinden sich zwei Körper im thermischen Gleichgewicht mit einem dritten, so stehen sie auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.

### 2.2 Temperatur

Die Temperatur wird „makroskopisch“ definiert durch Messung der Temperaturabhängigkeit diverser physikalischer Phänomene, wie z.B.

- Gasdruck
- Länge eines festen Stabes

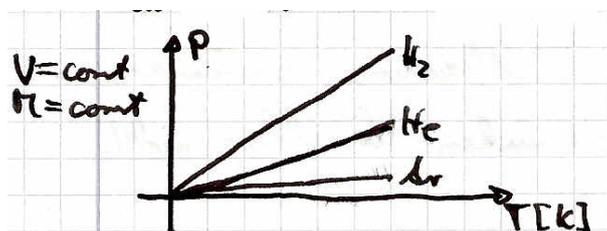
- Volumen einer Flüssigkeit
- elektrische Leitfähigkeit eines Halbleiter.

Temperaturskala und Eichung:

Historisch (1742) gab es die erste präzise Eichung durch thermische Ausdehnung von Quecksilber. Man betrachtet die Höhe  $L$  einer Säule. Es gilt  $L(T_C) = L(0) \cdot (1 + \alpha T)$ . Hierbei ist  $\alpha$  der Ausdehnungskoeffizient. Man definierte  $T_C = 0^\circ\text{C}$ : Schmelzpunkt von Eis,  $T_C = 100^\circ\text{C}$ : Siedetemperatur von Wasser bei  $p = 1\text{bar} = 1,013 \cdot 10^5\text{Pa}$ .

Gedankenversuch:

Man betrachtet unterschiedliche Gase ( $\text{H}_2$ , Ar, He) bei konstantem Volumen und konstanter Masse aber variabler Temperatur (cf. Abb. h2arhe).

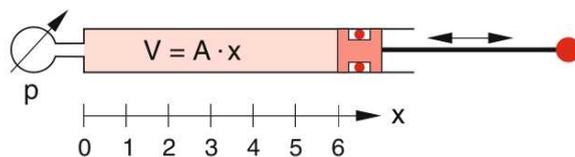


**Abbildung 2.1:** Bei verschiedenen Gasen steigt der Druck bei steigender Temperatur verschieden schnell.

## 2.3 Das ideale Gas

Versuch:

Betrachte die Anordnung aus Abbildung 2.2. Verdoppeln des Drucks führt zu Halbierung des Volumens,



**Abbildung 2.2:** Durch einen beweglichen Kolben können Volumen  $V$  und Druck  $p$  variiert werden.

halbierung des Drucks führt zu Verdopplung des Volumens. Es folgt

$$p \cdot V = \text{konst.}$$

Zusammenfassend folgt die Zustandsgleichung für ideale Gase

$$\boxed{p \cdot V = k_B \cdot N \cdot T}. \quad (2.3.1)$$

$k_B$  ist die Boltzmann-Konstante,  $k_B = 1,3807 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ . Außerdem gilt

$$p \cdot V = k_B \cdot N_A \cdot n \cdot T = n \cdot R \cdot T, \tag{2.3.2}$$

wobei  $k_B \cdot N_A := R$  die ideale Gaskonstante  $R = 8,314 \frac{J}{molK}$  ist und  $N_A$  die Avogadro-Konstante mit  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ .

Ist  $N$  fest, so gelten die Abhängigkeiten  $P(V, T)$ ,  $T(V; P)$  und  $V(P, T)$ . Ein Mol Teilchen ( $n = 1$ ) füllt bei der Temperatur  $T = T_0 = 273,15K$ , und einem Druck von  $p = p_0 = 1atm = 1,013 \cdot 10^5 Pa$  ein Volumen von 22,44l aus.

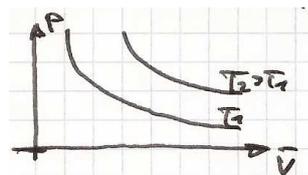
Wir definieren  $\bar{V} = \frac{V}{n}$  = Volumen pro Mol. Mit dem idealen Gasgesetz folgt dann

$$p\bar{V} = RT.$$

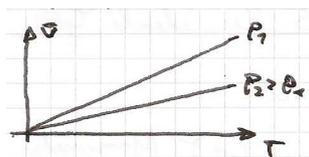
**Definition:** (Intensive/extensive Größe)

Eine Größe heißt *intensiv* genau dann, wenn sie unabhängig von der Stoffmenge ist. Beispiele sind  $T$  und  $p$ . Eine Größe heißt *extensiv*, falls sie von der Stoffmenge linear abhängig ist. Beispiele sind  $N$  und  $V$ .

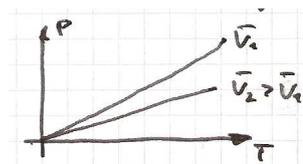
Wir betrachten hierzu die Phasendiagramme des idealen Gases (cf. Abbildung 2.3 - 2.5). Reale Gase



**Abbildung 2.3:** Die Hyperbeln bei  $T = \text{konst.}$  heißen Isothermen.

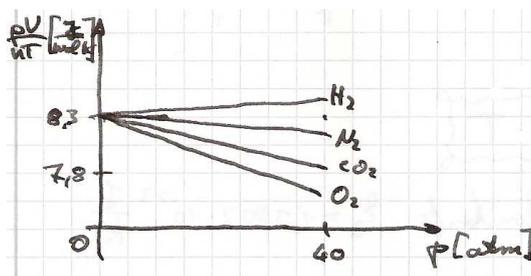


**Abbildung 2.4:** Die Geraden bei  $p = \text{konst.}$  heißen Isobaren.



**Abbildung 2.5:** Die Geraden bei  $\bar{V} = \text{konst.}$  heißen Isochoren.

verhalten sich aber unterschiedlich und können nicht vollständig mit der idealen Gasgleichung (2.3.1) beschrieben werden. Vergleiche hierzu Abbildung 2.6.



**Abbildung 2.6:** „Reale Gase verhalten sich unterschiedlich“

### 2.3.1 Barometrische Höhenformel

**Versuch:** Toricelli'sches U-Rohr

Betrachte den Aufbau in Abbildung 2.7. Es ist  $p_0$  der Luftdruck (hier  $101323\text{Pa} = \text{Normaldruck}$  auf Seehöhe) und  $\Delta h = 760\text{mm} \hat{=} 1\text{Torr}$ .

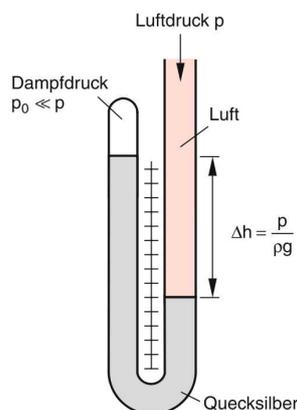


Abbildung 2.7: Toricelli'sches U-Rohr.

Betrachte nun Abbildung 2.8. Es gilt  $p(h + dh) < p(h)$  und

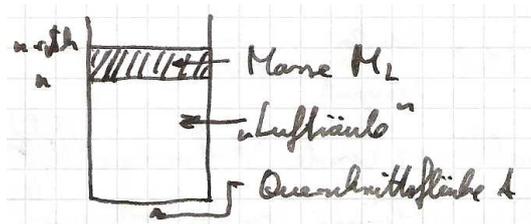


Abbildung 2.8: Eine Masse  $M_L$  übt auf ein Luftvolumen Druck aus.

$$dp = p(h + dh) - p(h) = -\frac{M_L \cdot g}{A} = -\frac{\rho \cdot V \cdot g}{A} = \rho(h) \cdot g \cdot dh = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot p \cdot dh. \quad (2.3.3)$$

Wegen  $p \cdot V = \text{konst.}$ ,  $\rho = \frac{M_L}{V}$  folgt  $\frac{p}{\rho} = \text{konst.} = \frac{p_0}{\rho_0} \Rightarrow \rho = \rho_0(h) = \frac{p}{p_0}$ . Wir lösen (2.3.3) durch Separation der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -\frac{\rho_0}{p_0} q dh \\ \Leftrightarrow \ln(p) &= -\frac{\rho_0}{p_0} gh + c \end{aligned}$$

mit  $p(h=0) := p_0$  folgt  $c = \ln(p_0)$ . Wir haben also die barometrische Höhenformel

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho g}{p_0} h} \quad (2.3.4)$$

gefunden. Es ist zu beachten, dass konstante Temperatur vorausgesetzt wird. Die Formel wird in Abbildung 2.9 graphisch dargestellt.

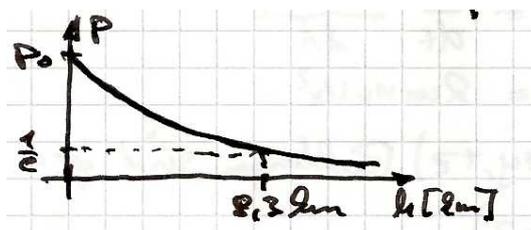


Abbildung 2.9: Abnahme des Drucks bei zunehmender Höhe.

#### Bemerkung:

- Bei Flüssigkeiten gilt  $\rho(h) = \text{konst.} \Rightarrow \frac{dp}{dh} = \text{konst.} = -\rho \cdot g$ . Damit hat man  $dp = -\rho g dh \Rightarrow p = -\rho g h$ . Vergleiche hierzu Abbildung 2.10.

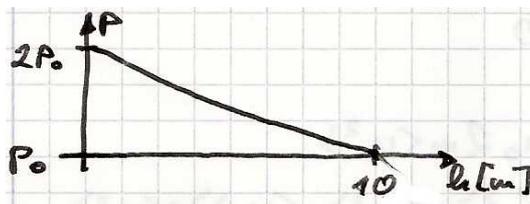


Abbildung 2.10: Bei Flüssigkeiten nimmt der Druck linear ab.

- Die Kompressibilität  $\kappa$  eines idealen Gases ist definiert durch

$$\kappa := -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$$

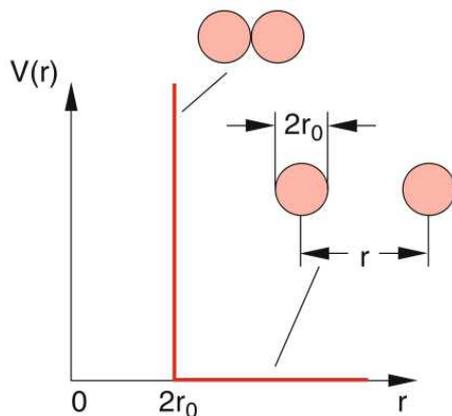
Weil  $p \cdot V = \text{const.}$ ,  $\frac{dv}{dp} = -\frac{\text{const.}}{p^2} = \frac{V}{p} \stackrel{T=\text{konst.}}{=} \frac{\partial V}{\partial p}$  folgt

$$\kappa = \frac{1}{p}$$

### 2.3.2 Mikroskopisches Modell für ideale Gase

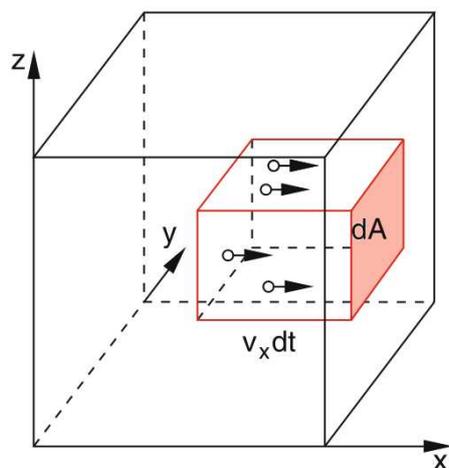
In unserem Modell gehen wir von folgenden Annahmen aus: Ein Gas besteht aus Atomen oder Molekülen, die sich mit statistisch verteilten Geschwindigkeiten bewegen und die sich wie kleine starre Kugeln mit

Radius  $r_0$  verhalten. Bei Stößen untereinander und mit der Wand gelten Energie- und Impulssatz. Die Stöße sind vollkommen elastisch. Eine Wechselwirkung der Teilchen tritt nur bei Stößen auf (direkte Berührung der starren Kugeln). Bei Abständen  $d > 2r_0$  beeinflussen sich die Gasatome überhaupt nicht. Das Wechselwirkungspotential für dieses Modell der starren Kugeln ist deshalb wie in [Abbildung 2.11](#) dargestellt,  $V(r) \equiv 0$  für  $|r| > 2r_0$  und  $V(r) = \infty$  für  $|r| \leq 2r_0$ . Betrachte nun das Flächenelement aus



**Abbildung 2.11:** Wechselwirkungspotential zweier starrer Kugeln mit Radius  $r_0$ .

[Abbildung 2.12](#). Es gilt



**Abbildung 2.12:** Zur Herleitung von [2.3.5](#).

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{zeitliche Impulsänderung}}{\text{Fläche}}.$$

mit  $Z$  Teilchen auf  $dA$  gilt

$$p = \frac{d}{dt} \frac{2Zmv_x}{dA}.$$

Mit  $Z = n_1 \cdot v_1 \cdot dAdt$  folgt

$$p = 2mn_x v_x^2. \quad (2.3.5)$$

Da das ideale Gas homogen und isotrop ist, sind die Richtungen  $(+x, +y, +z)$  genauso häufig, wie  $(-x, -y, -z)$ . Damit gilt

$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$$

mit

$$\langle v_x \rangle := \frac{1}{N} \int_0^\infty N(v_x) v_x dv_x,$$

aber

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \neq 0.$$

Für den mittleren Druck ergibt sich

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} n_0 2m \langle v_x^2 \rangle. \quad (2.3.6)$$

Da  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  gilt  $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$  mit  $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$ . Damit hat man

$$\langle p \rangle = \frac{1}{3} n_0 m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n_0 \underbrace{\frac{m}{2} \langle v^2 \rangle}_{\langle E_{\text{kin}} \rangle} \quad (2.3.7)$$

und schließlich

$$\boxed{\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T}. \quad (2.3.8)$$

### 2.3.3 Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung (eines idealen Gases)

An das ideale Gas haben wir die folgenden Forderungen:

- Die Geschwindigkeiten sollen isotrop sein.
- Die Geschwindigkeiten sind nach charakteristischer Funktion verteilt.
- $dN_x =$  Anzahl der Teilchen mit  $x$ -Komponente aus dem Geschwindigkeitsintervall  $(v_x, v_x + dv_x)$ .

Für die Wahrscheinlichkeit  $p(v_x)dv_x$ , dass die Teilchen aus dem Geschwindigkeitsintervall  $(v_x, v_x + dv_x)$  sind, gilt

$$p(v_x)dv_x = \frac{dN_x}{N},$$

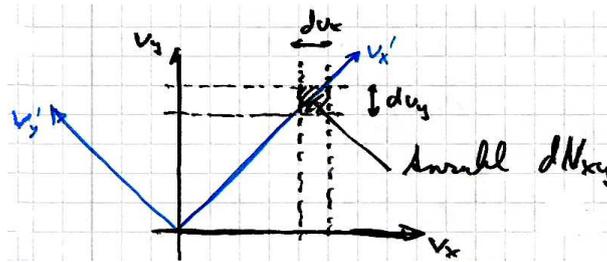
wobei hier  $N$  die Gesamtzahl der Teilchen ist.  $v_x$  ist genauso wahrscheinlich wie  $-v_x$ . Aus der Isotropie folgt auch

$$\begin{aligned} p(v_y)dv_y &= f(v_y^2)dv_y \\ p(v_z)dv_z &= f(v_z^2)dv_z. \end{aligned}$$

Für die Gesamtwahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} p(\bar{v})d\bar{v} &= p(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = \frac{dN_{x,y,z}}{N} \\ &= \frac{dN_x}{N} \cdot \frac{dN_y}{N} \cdot \frac{dN_z}{N} \\ &= f(v_x^2) \cdot f(v_y^2) \cdot f(v_z^2) \cdot dv_x dv_y dv_z \end{aligned}$$

Nun wechselt man das Koordinatensystem, wie in Abbildung 2.13 veranschaulicht. In den alten Ko-



**Abbildung 2.13:** Durch geschicktes Wechseln des Koordinatensystems ergibt sich die Vereinfachung  $v'_y = 0$ .

ordinaten (ohne Strich) gilt  $dN_{xy} = N \cdot f(v_x^2)f(v_y^2)dv_x dv_y$ . In den neuen Koordinaten (mit Strich)  $fN_{xy} = N \cdot f(v_x'^2)f(v_y'^2)dv'_x dv'_y$ . Es folgt

$$f(v_x^2)f(v_y^2) = f(v_x'^2)f(v_y'^2).$$

Man sieht:  $v'_x = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ,  $v'_y = 0$ . Damit folgt

$$f(v_x^2)f(v_y^2) = f(v_x'^2 + v_y'^2)f(0).$$

Jetzt können wir mit  $f(0) = A$  sofort bestimmen:

$$A \cdot f(z) = f(x)f(y),$$

wobei wir die Abkürzungen  $x := v_x^2$ ,  $y := v_y^2$  und  $z := x + y$  verwenden.

Ableiten nach  $x$  ergibt

$$A \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} = A f'(z) = f'(x)f(y),$$

ableiten nach  $y$

$$A \frac{df}{dz} \frac{dz}{dy} = A f'(z) = f(x)f'(y).$$

Damit folgt  $f'(x)f(y) = f(x)f'(y)$  und wir erhalten die Differentialgleichung

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)}. \quad (2.3.9)$$

Es gilt  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \gamma = \text{konst.}$ , denn  $v_x^2$  und  $v_y^2$  sind unabhängig. Damit erhalten wir  $f(x) = f(0)e^{\gamma x}$  als Lösung für die Differentialgleichung (2.3.9), also ohne Abkürzungen

$$f(v_x^2) = A \cdot e^{\gamma v_x^2}. \quad (2.3.10)$$

Physikalisch sinnvoll ist nur  $\gamma < 0$ . Sei  $\gamma' = -\gamma$ . Damit haben wir

$$\frac{dN_{x,y,z}}{dv_x dv_y dv_z} = N \cdot A^3 \cdot e^{-\gamma'(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

und schließlich

$$\boxed{p(\vec{v})d\vec{v} = A^3 \cdot e^{-\gamma'v^2} d\vec{v}}. \quad (2.3.11)$$

Hierbei ist zu beachten, dass  $\vec{v}$  ein Vektor ist.

$\frac{dN_v}{N}$  ist die Anzahl der Teilchen mit  $|v|$  im Intervall  $(v, v + dv)$ . Es ist dann  $p(\vec{v})d\vec{v}_x$  das Volumen der Kugelschale im  $v$ -Raum mit der Dicke  $dv$ . Es gilt

$$dN_v = N \cdot A^3 e^{-\gamma'v^2} 4\pi v^2 dv \quad (2.3.12)$$

und somit

$$\boxed{p(v)dv = 4\pi A^3 v^2 e^{-\gamma'v^2} dv}. \quad (2.3.13)$$

Für  $N$  gilt

$$\begin{aligned} N &= \int dN_v = 4\pi N A^3 \int_0^\infty dv v^2 e^{-\gamma'v^2} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma'^{3/2}} \\ \Rightarrow A^3 &= \left(\frac{\gamma'}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Jetzt muss noch  $\gamma'$  bestimmt werden.  $\gamma'$  folgt aus der folgenden physikalischen Überlegung:

$$\begin{aligned} \langle E_{\text{kin}} \rangle &= \langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{N} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) dN_v \\ &= 2\pi A^3 m \int_0^\infty dv v^4 e^{-\gamma'v^2} = \frac{3}{2}k_B T \\ \Rightarrow \gamma' &= \frac{m}{2k_B T}. \end{aligned}$$

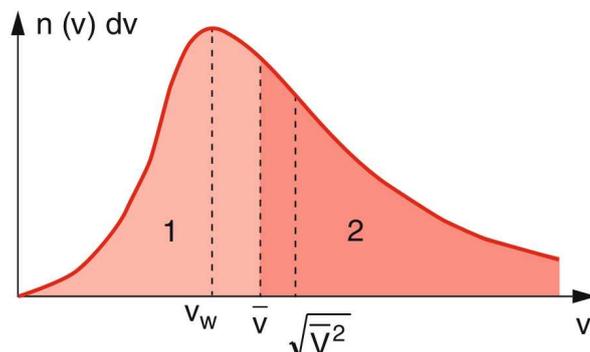
Damit folgt

$$dN_v = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv$$

und wir haben die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

$$\boxed{p(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2} \quad (2.3.14)$$

erhalten. Diese ist in Abbildung 2.14 gezeichnet. Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit ist  $v_w$ . Es gilt



**Abbildung 2.14:** Maxwell-Boltzmann'sche Geschwindigkeitsverteilung mit wahrscheinlichster Geschwindigkeit  $v_w$ , mittlerer Geschwindigkeit  $\bar{v} = \langle v \rangle$  (welche die Fläche unter der Kurve in gleiche Hälften 1 und 2 teilt) und die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat  $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ .

$\left. \frac{dp}{dv} \right|_{v_w} = 0$  und daher

$$v_w = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}. \quad (2.3.15)$$

Für die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  gilt

$$\bar{v} = \int_0^\infty v p(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \frac{2v_w}{\sqrt{\pi}} \quad (2.3.16)$$

und für die charakteristische Geschwindigkeit  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_w. \quad (2.3.17)$$

Für Stickstoff ( $N_2$ ) gilt beispielsweise bei  $T = 300\text{K}$ :  $m(N_2) = 4,67 \cdot 10^{-26}\text{kg}$ ,  $v_w = 422 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\langle v \rangle = 476 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \frac{5}{7} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

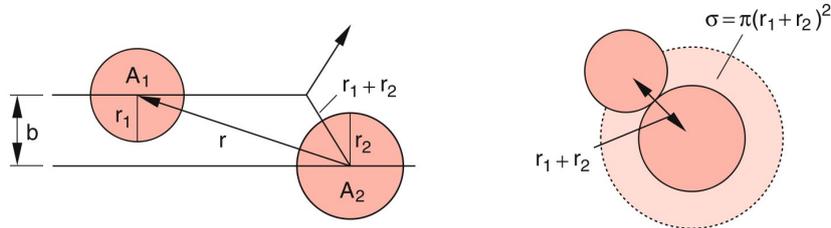
## 2.4 Reale Gase

Bisher haben wir uns nicht darum gekümmert, wie es die Teilchen bewerkstelligen, im „*thermischen Gleichgewicht*“ die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung anzunehmen. Dies geschieht durch *Stöße*, da die Teilchen einen endlichen Durchmesser haben. Im realen Gas werden also die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen nicht mehr vernachlässigt, sondern beispielsweise mit Hilfe des „*stoßende-Kugeln-Modells*“ mitgenommen.

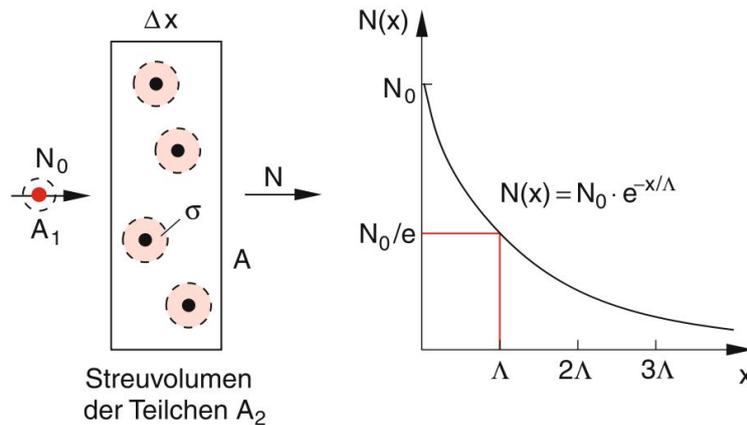
### 2.4.1 Stoßquerschnitt, mittlere freie Weglänge

Wie weit fliegt ein Gasteilchen, bis es (im Mittel) mit einem anderen zusammenstößt?

**Definition:** (Stoß) Ein Stoß tritt auf, wenn  $b < r_1 + r_2$  (vergleiche hierzu Abbildung 2.15), d.h. falls das Zentrum von Teilchen A die Fläche  $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$  durchfliegt. Betrachte nun Abbildung 2.16. Die



**Abbildung 2.15:** Stoßparameter  $b$  und Stoßquerschnitt  $\sigma$  bei Stößen zwischen harten Kugeln mit Radien  $r_1$  und  $r_2$ .



**Abbildung 2.16:** Frontalansicht auf Volumen  $F \cdot \Delta x$  mit Seitenflächen  $F$ . Das Teilchen  $A$  fliegt von der Seite in das Volumen, in welchem sich Teilchen  $B$  befinden.

Gesamtstoßfläche  $F_B$  der Targeeteilchen  $B$  im Volumen  $F \cdot \Delta x$  (bei kleiner Anzahl-Dichte  $n$ , so dass keine Abschattungseffekte auftreten), ergibt sich zu

$$F_B = \underbrace{n \cdot \Delta x \cdot F}_{\text{Gesamtzahl}} \cdot \sigma.$$

Damit ist die Stoßwahrscheinlichkeit auf dem Weg  $\Delta x$  gegeben durch  $\frac{F_B}{F} = n\sigma\Delta x$ . Von diesen  $N$  Teilchen pro Zeiteinheit auf  $F$  senkrecht zu  $F$  werden also  $\Delta N = -Nn\sigma\Delta x$  durch Stöße abgelenkt (bzw. gestreut) ( $\Delta N < 0$ , da  $N$  durch Stöße abnimmt).

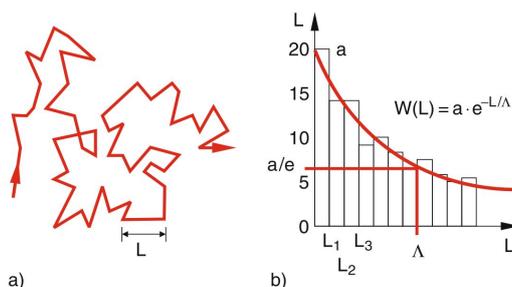
Es kommt also zu einer Abnahme von  $N$  beim Durchgang des Strahls aus  $A$ -Teilchen durch eine Probe der Dicke  $x$ , wobei

$$N(x) = N_0 e^{-n\sigma x} = N_0 e^{-x/\Lambda}. \tag{2.4.1}$$

Es ist  $N(x)$  der transmittierte ungestreute Strahl,  $N_0$  der einfallende Teilchenstrahl und  $\Lambda$  die mittlere freie Weglänge, gegeben durch

$$\Lambda = \frac{1}{n\sigma}.$$

$\Lambda$  gibt an, wie weit ein  $A$ -Teilchen im Mittel fliegt, bis es erneut gestreut wird. Auf diese Weise entsteht dann ein Irrflug, ein so genannter „random walk“. Betrachte beispielsweise Stickstoff ( $N_2$ ) bei Normaldruck



**Abbildung 2.17:** a) Bahn eines gestreuten Teilchens mit mittlerer freier Weglänge  $\Lambda$ . b) Histogramm der Längenverteilung zwischen zwei Stößen.

$p = 10^5 \text{ Pa} \hat{=} n \approx 3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ . Es ist  $\sigma_{N_2} = 45 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$  für die  $N_2$ -Moleküle untereinander ist  $\Lambda \approx 70 \text{ nm}$ ! Das entspricht einer mittleren Flugzeit  $\tau$  von  $\tau = \frac{\Lambda}{\langle v \rangle} \approx 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ .

## 2.4.2 Transportsprozesse (in Gasen)

Durch die besprochenen Stöße kommt es zu Transport von

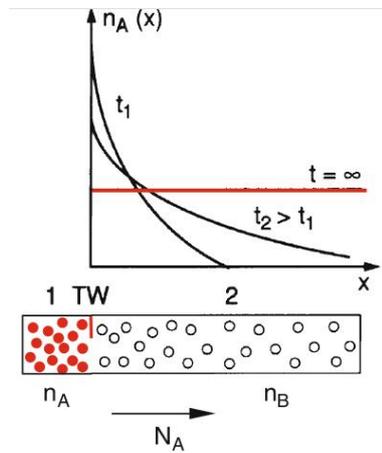
- Masse  $\rightarrow$  „Diffusion“, Strom getrieben von Dichtegradient,
- Impuls  $\rightarrow$  „Viskosität“, Impulsdiffusion getrieben von Schergradient in Flüssigkeit,
- Energie  $\rightarrow$  „Wärmediffusion“, Wärmetransport getrieben von Temperaturgradient,
- (Ladung)  $\rightarrow$  „Ladungsdiffusion“, elektrischer Strom getrieben von elektrischem Feld, Potentialgradienten.

Die Ströme werden von Gradienten der entsprechenden Potentiale erzeugt.

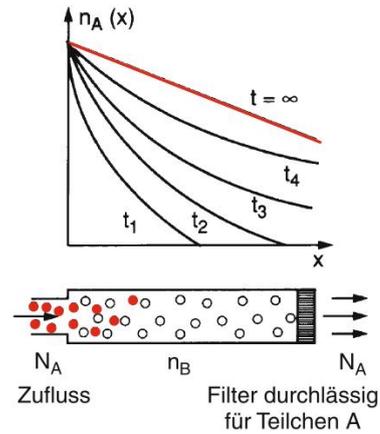
### 2.4.2.1 Massendiffusion

#### Beispiel 1:

Betrachte zwei Kammern  $A$  und  $B$ , die durch eine herausnehmbare Wand voneinander getrennt sind. In den Kammern befinden sich jeweils unterschiedliche Teilchenarten  $A$  und  $B$ . Nach Entfernen der Trennwand in Abbildung 2.18 fliegen  $A$ -Teilchen in den Raum  $B$ ,  $B$ -Teilchen in den Raum  $A$ . Es bildet sich ein Dichteprofil  $n_A(x, t)$ ,  $n_B(x, t)$  aus. Nach sehr langer Zeit ist  $n_A(x, t \rightarrow \infty) = \text{const}_x$  und  $n_B(x, t \rightarrow \infty) = \text{const}'_x$ . Der Prozess ist dadurch bestimmt, wie weit die Teilchen zwischen zwei Stößen fliegen können und wie schnell sie fliegen.



**Abbildung 2.18:** Die Teilchen  $A$  und  $B$  in der Kammer sind durch eine herausnehmbare Trennwand getrennt.



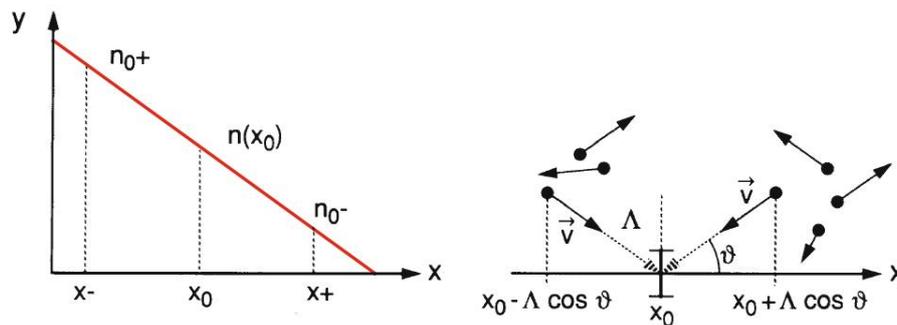
**Abbildung 2.19:** Durch die linke Öffnung gelangen kontinuierlich Teilchen in die Kammer, rechts strömen sie wieder hinaus.

**Beispiel 2:**

Betrachte nun eine längliche Kammer, die links und rechts eine Öffnung hat. Links werden  $A$ -Teilchen in die Kammer befördert, rechts werden  $A$ -Teilchen abgesaugt (cf. [Abbildung 2.19](#)). In diesem Fall wird die Verteilung  $n_A$  auch für  $t \rightarrow \infty$  nicht konstant, da ja von links immer neue Teilchen dazukommen und rechts immer welche fehlen. Es wird sich die in [Abbildung 2.19](#) dargestellte Verteilung einstellen. Die Lösung  $n_A(x)$  hängt von Randbedingungen ab.

**Quantitative Beschreibung**

Sei  $n = N(x)$  in einer kleinen Region um  $x_0$  eine lineare Funktion (betrachte hierzu [Abbildung 2.20](#)),  $n$  sei nicht von  $y$  und  $t$  abhängig. Aus [Abbildung 2.20](#) wird ersichtlich, dass



**Abbildung 2.20:** Zur Herleitung der Diffusionsgleichung. Linearisierung von  $n$  in einer kleinen Umgebung von  $x_0$ .

$$\begin{aligned}
 n_+ &\approx n_0 + \Delta x \frac{dn}{dx}, \\
 n_- &\approx n_0 - \Delta x \frac{dn}{dx}, \\
 \Delta x &\approx x_0 - x_- \approx x_+ - x_0.
 \end{aligned}$$

Teilchen, die eine Fläche  $dF \parallel (y, t)$  bei  $x_0$  von links und rechts durchfliegen, haben einen Stoß bei  $x^-$  erlitten, mit  $x_0 - x^- = \lambda \cdot \cos(\vartheta)$ . Gleiches gilt für Teilchen von rechts, die durch  $dF$  fliegen. Wegen der

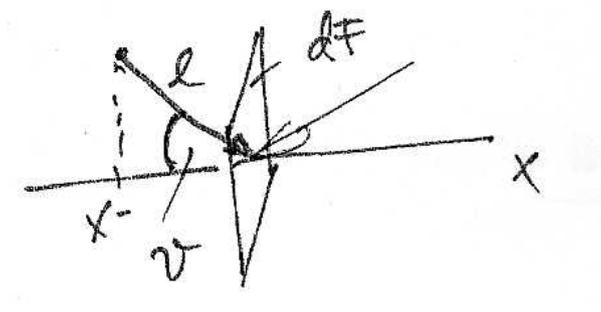


Abbildung 2.21: Zur Herleitung der Diffusionsgleichung.

Isotropie der Geschwindigkeitsverteilung  $p(v)$  fliegen im Mittel (fast<sup>1</sup>) genauso viele Teilchen von rechts nach links wie umgekehrt. Wir definieren nun  $dN_+$  als die Teilchenzahl, die im Zeitintervall  $\Delta t$  die Fläche  $dF$  aus dem Raumwinkel  $d\Omega$  mit Geschwindigkeit  $v$  unter dem Winkel  $\vartheta$  durchqueren. Betrachte hierzu Abbildung 2.22. Es gilt also

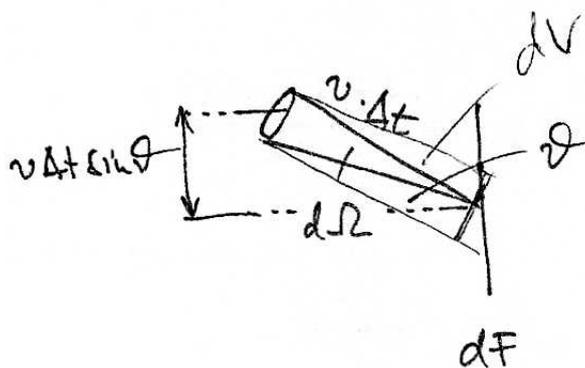


Abbildung 2.22: Zur Herleitung der Diffusionsgleichung.

<sup>1</sup>Der gerichtete Nettofluss der Teilchen sei sehr klein gegen den mittleren ungerichteten Fluss!

$$dN_+(v) = n_+p(v)dv \cdot \underbrace{v \cdot \Delta t \cdot dF \cdot \cos(\vartheta)}_{\substack{\text{Volumen } dV, \text{ aus dem} \\ \text{die Teilchen kommen}}} \cdot \underbrace{\frac{d\Omega}{4\pi}}_{\substack{\text{isotroper} \\ \text{Fluss}}},$$

$$dN_-(v) = n_-p(v)dv \cdot v \cdot \Delta t \cdot dF \cdot \cos(\vartheta) \cdot \frac{d\Omega}{4\pi},$$

$$\Delta x \approx -\Lambda \cos(\vartheta).$$

Für den Strom in  $x$ -Richtung  $dj_x = \left( \frac{dN_+}{dt} - \frac{dN_-}{dt} \right) \frac{1}{dF}$  gilt somit

$$dj_x(v) = -2\Lambda p(v)vdv \frac{\cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi}{4\pi} \frac{dn}{dx}.$$

Der Gesamtstrom folgt aus Integration über  $p$  und  $v$ , mit  $\langle v \rangle = \int vp(v)dv$  folgt das *Fick'sche Gesetz*

$$j_x = -\frac{\Lambda \langle v \rangle}{3} \frac{dn}{dx} = -D \frac{dn}{dx} \tag{2.4.2}$$

mit der Diffusionskonstante des Realen Gases  $D = \frac{\Lambda \langle v \rangle}{3}$ . Mit  $\Lambda = \frac{1}{n\sigma}$  und  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$  hat man

$$D = \frac{1}{n\sigma} \sqrt{\frac{8k_B T}{9\pi m}}. \tag{2.4.3}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung)

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} j_x(t) = 0$$

folgt die *eindimensionale Diffusionsgleichung*

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}. \tag{2.4.4}$$

**Analog gilt für drei Dimensionen:**

Das Fick'sche Gesetz

$$\vec{j} = -D \text{grad } n \tag{2.4.5}$$

(d.h. die Teilchenstromdichte auf Grund der Diffusion ist gleich dem Produkt aus Diffusionskoeffizient  $D$  und dem Gradienten der Teilchendichte) und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0,$$

welche auf die Diffusionsgleichung in drei Dimensionen

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n(\vec{r}, t) \tag{2.4.6}$$

führt.

**Lösung der eindimensionalen Diffusionsgleichung an einem Beispiel**

Wir betrachten folgende Situation:

- Bei  $t = 0$  sind alle Teilchen bei  $x = x_0$  versammelt, also

$$n(x, t = 0) = n_0 \delta(x - x_0). \quad (2.4.7)$$

- Es gibt keine Ränder, d.h. das Medium soll unendlich ausgedehnt sein.

Betrachte die (räumliche) Fourier-Transformation von  $n(x, t)$

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{n}(k, t). \quad (2.4.8)$$

Damit gilt dann

$$\frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} = - \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 e^{ikx} \tilde{n}(k, t).$$

Dies setzen wir in die eindimensionale Diffusionsgleichung 2.4.4 ein, d.h. auf beiden Seiten die Fourier-Transformierte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left[ \frac{\partial \tilde{u}(k, t)}{\partial t} + Dk^2 \tilde{u}(k, t) \right] = 0.$$

Damit dies für alle  $x$  gilt, muss die Klammer  $[\dots] = 0$  sein, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + Dk^2 \tilde{u} &= 0 \\ \Rightarrow \tilde{u}(k, t) &= \tilde{u}(k, 0) e^{-Dk^2 t}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Lösung im  $k$ -Raum gefunden. Wir müssen also noch das Inverse von (2.4.8) bilden:

$$\tilde{u}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} n(x, t).$$

Für  $t = 0$  gilt mit (2.4.7)

$$\begin{aligned} \tilde{n}(k, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} n_0 \delta(x - x_0) = \frac{n_0}{2\pi} e^{-ikx_0} \\ \Rightarrow \tilde{u}(k, t) &= \frac{n_0}{2\pi} e^{-ikx_0} e^{-Dk^2 t} \\ \Rightarrow n(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x_0) - Dk^2 t}. \end{aligned}$$

Löst man dieses Integral, so erhält man

$$n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}},$$

und schließlich

$$\boxed{n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}.} \quad (2.4.9)$$

Wir erhalten als Verteilung eine Gauß-Glockenkurve (cf. Abbildung 2.23).  $n(x = x_0, t)$  nimmt wie  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  ab. Die Breite der Glockenkurve nimmt wie  $4Dt$  zu. Für die „mittlere Ausbreitung“ der Partikel gilt

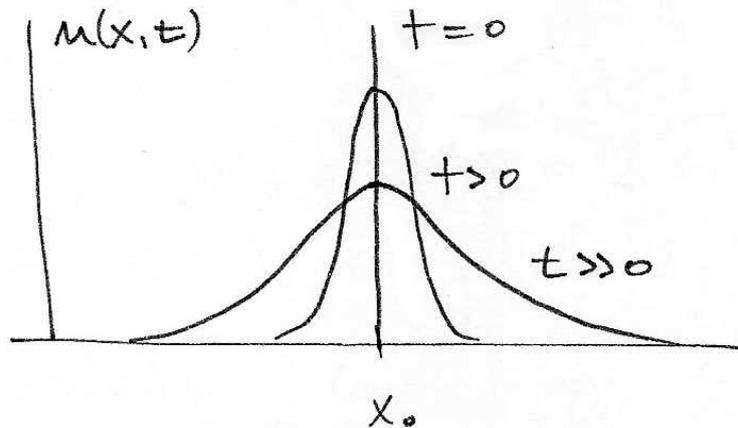


Abbildung 2.23: Verteilung diffundierende Teilchen zu verschiedenen Zeiten.

$$\langle (x - x_0)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) (x - x_0)^2 dx = 2Dt. \quad (2.4.10)$$

Für  $x_0 = 0$  hat man damit

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt, \quad \langle x \rangle = 0.$$

Der Schwerpunkt der Wolke der diffundierenden Teilchen bleibt in Ruhe, aber ihre Breite  $\langle x^2 \rangle$  nimmt mit der Zeit zu. (Beispielsweise kann ein Tintentropfen in einem großen mit Wasser gefüllten Gefäß auf diese Weise beschrieben werden.)

Die Lösung der dreidimensionalen Diffusionsgleichung (2.4.6) ist nicht wesentlich anders/komplizierter, da sich die Bewegungen in den drei Dimensionen unabhängig überlagern. Mit  $\vec{r} = (x, y, z)$  und  $|\vec{r}| = r$  erhält man

$$n(r, t) = n_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}^3} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}. \quad (2.4.11)$$

Der Wert  $n(0, t)$  geht nun mit  $\frac{1}{\sqrt{t^3}}$  anstatt mit  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  in einer Dimension. Für die mittlere Ausbreitung ( $\hat{=}$  Breite der Glockenkurve) gilt

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = 3 \cdot 2Dt = 6Dt. \quad (2.4.12)$$

### Physikalisches Bild

Jedes Teilchen macht Stöße (im Mittel nach einer Flugdistanz  $\Lambda$ ) und ändert dabei stochastisch seine Richtung. Nach  $N$  Stößen sei es am Ort  $\vec{r}$  angelangt. Es gilt also

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i$$

mit  $\langle |\vec{r}_i| \rangle \approx \Lambda$ . Dies ist ein „Irrflug“ bzw. „random walk“. Jedes Teilchen macht seinen Eigenen „random

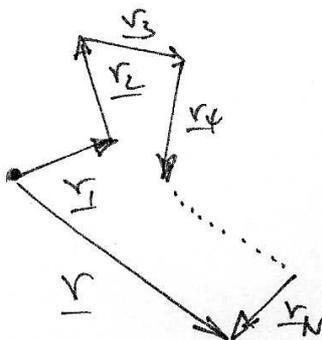


Abbildung 2.24: „random walk“.

walk“, der von dem der anderen unabhängig ist. Man sieht, dass im Mittel über viele Teilchen und viele Trajektorien  $\langle \vec{r} \rangle \rightarrow 0$  geht. Wie groß ist aber  $\langle r^2 \rangle$ ? Es gilt

$$\begin{aligned} r^2 &= \sum_i \sum_j \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_{\substack{i \neq j \\ j \neq i}} \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \\ \Rightarrow \langle r^2 \rangle &= \sum_{i=1}^N \langle r_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \rangle, \end{aligned}$$

es sind ja alle  $\vec{r}_i$ s unabhängig, also  $\langle \vec{r}_j \cdot \vec{r}_j \rangle = 0$ . Damit haben wir

$$\langle r^2 \rangle = N \cdot \langle r_i^2 \rangle \approx N \cdot \Lambda^2. \quad (2.4.13)$$

Mit  $N \cdot \Lambda =: s$  Pfadlänge  $s$  und  $s = v \cdot t$ , mit der Geschwindigkeit  $v$  des Teilchens/Walkers ergibt sich

$$\langle r^2 \rangle \approx s \cdot \Lambda = v \cdot \Lambda \cdot t = 3Dt. \quad (2.4.14)$$

### **Bemerkung:**

Der random walk entspricht der Dispersion. 1828 beobachtet der englische Botaniker Brown Pollen im Wasser unter dem Mikroskop. Diese führen solche Zitterbewegungen aus. Die Brown'sche Bewegung entspricht also auch dem random walk.

1905 stellt Einstein eine Beziehung zwischen den Postulaten der Thermodynamik, der kinetischen Theorie der Wärmeleitung und der Brown'schen Bewegung her.

### 2.4.3 Zustandsgleichung des realen Gases

Laut dem idealen Gasgesetz gilt

$$p\bar{V}_{\text{id}} = RT, \quad (2.4.15)$$

wobei  $\bar{V}_{\text{id}}$  das Volumen pro Mol des idealen Gases ist. Aus der Gleichung folgt  $\bar{V}_{\text{id}} \rightarrow 0$  für  $T \rightarrow 0$ . In einem realen Gas ist aber  $\bar{V}_{T \rightarrow 0} > 0$ , da die einzelnen Teilchen ein Eigenvolumen ( $b$ ) haben. Die ideale

Gasgleichung muss also ergänzt werden. Wir fassen den Ansatz

$$\begin{aligned}\bar{V} &= b + \frac{RT}{p} \\ \Leftrightarrow p &= \frac{RT}{\bar{V} - b}.\end{aligned}\quad (2.4.16)$$

Betrachte den Kompressibilitätsfaktor

$$\begin{aligned}z &:= \frac{\bar{V}}{\bar{V}_{\text{id}}} = \frac{p\bar{V}}{RT} = z(p, T) \\ &= \frac{p}{RT} \left( b + \frac{RT}{p} \right) = 1 + \frac{bp}{RT}.\end{aligned}$$

In Abbildung 2.25 ist dieser für Wasserstoff ( $\text{H}_2$ ) und Stickstoff ( $\text{N}_2$ ) gezeichnet. Offenbar funktioniert

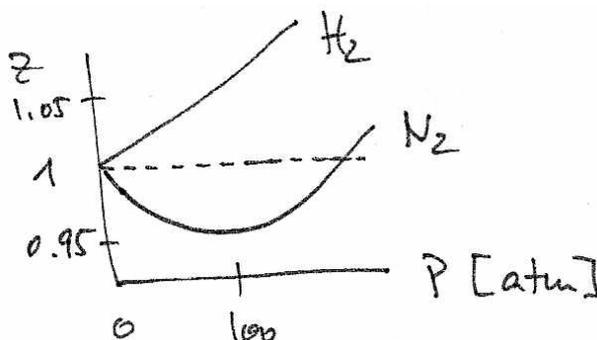


Abbildung 2.25: Kompressionsfaktor in Abhängigkeit vom Druck bei Wasserstoff und Stickstoff.

dieser Ansatz (2.4.16) recht gut für Wasserstoff, er ist aber weniger geeignet für Stickstoff. Wenn  $z < 1$  bedeutet das ja, dass das Volumen mit steigendem Druck abnimmt. Es müssen also anziehende Wechselwirkungen zwischen den Teilchen (bzw. Volumina des Gases) berücksichtigt werden.

Das Volumen  $V_1$  mit der Dichte  $\rho_1$  übt je Teilchen die Kraft  $f$  auf das Volumen  $V_2$  mit Dichte  $\rho_2$  aus. Die Kraft  $F$  zwischen den Volumina  $V_1$  und  $V_2$  ist also

$$F \approx \rho_1 \rho_2 \cdot f \stackrel{\text{bei konst. Dichte}}{=} \rho^2 f.$$

Die Kraft ist also proportional zu  $\frac{1}{V^2}$ . Wir ergänzen also unseren Ansatz (2.4.16) zu

$$p = \frac{RT}{\bar{V} - b} - \frac{a}{\bar{V}^2}, \quad (2.4.17)$$

wobei  $a$  eine Konstante ist, die vom Material abhängt. Insgesamt erhalten wir die van der Waals'sche Zustandsgleichung des realen Gases

$$\boxed{\left( p + \frac{a}{\bar{V}^2} \right) \cdot (\bar{V} - b) = RT.} \quad (2.4.18)$$

Damit hat man für den Kompressibilitätsfaktor

$$\begin{aligned} z &= \frac{\bar{V}}{RT} \left( \frac{RT}{\bar{V}-b} - \frac{a}{\bar{V}^2} \right) = \frac{\bar{V}}{\bar{V}-b} - \frac{a}{RT\bar{V}} \stackrel{b \ll \bar{V}}{\approx} 1 + \frac{b}{\bar{V}} + \frac{b^2}{\bar{V}^2} + \dots - \frac{a}{RT\bar{V}} \dots \\ &= 1 + \left( b - \frac{a}{RT} \right) \frac{1}{\bar{V}} + \left( \frac{b}{\bar{V}} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Wir wollen  $z$  als Potenzreihe in  $p$ , da man in Experimente oft  $z(p)$  misst:

$$z(p, T) = 1 + A_1(T)p + A_2(T)p^2 + \dots, \quad (2.4.20)$$

wobei  $A_1(T)$  und  $A_2(T)$  von  $T$  abhängige Koeffizienten sind. Setzt man  $\frac{1}{\bar{V}} = \frac{p}{RTz}$  in (2.4.19) und vergleiche mit (2.4.20) ergibt

$$1 + A_1p + A_2p + \dots = 1 + \left( b - \frac{a}{RT} \right) \frac{p}{RTz} + \left( \frac{b}{RT} \right)^2 \frac{p^2}{z^2}.$$

Für  $p \rightarrow 0$ , d.h.  $z \rightarrow 1$  erhält man

$$A_1 = \frac{1}{RT} \left( b - \frac{a}{RT} \right); \quad z \approx 1 + A_1(T) \cdot p.$$

Ebenso

$$\begin{aligned} A_1 + A_2p + \mathcal{O}(p^2) &= A_1 \frac{1}{z} + \left( \frac{b}{RT} \right)^2 \frac{p}{z^2} + \mathcal{O}(p^2) \\ A_2p &= A_1 \left( \frac{1}{z} - 1 \right) + \left( \frac{b}{RT} \right)^2 \frac{p}{z^2} \\ A_2 &= A_1 \frac{1-z}{z} \frac{1}{p} + \left( \frac{b}{RT} \right)^2 \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{z \approx 1 + A_1p} \\ A_2 &\approx \left( \frac{b}{RT} \right)^2 - A_1^2 = \frac{a}{(RT)^3} \left( 2b - \frac{a}{RT} \right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$z = 1 + \frac{1}{RT} \left( b - \frac{a}{RT} \right) p + \frac{a}{(RT)^3} \left( 2b - \frac{a}{RT} \right) p^2 + \dots \quad (2.4.21)$$

Ideales Verhalten für  $p \rightarrow 0$  oder für  $T \rightarrow \infty$ . Für  $b > \frac{a}{RT}$  nimmt  $z(p)$  linear mit  $p$  zu (wie bei  $\text{H}_2$ ), für  $b < \frac{a}{RT}$  überwiegt die attraktive Wechselwirkung,  $z(p)$  nimmt zunächst mit  $p$  ab (wie bei  $\text{N}_2$ ).

Bei kleinen Temperaturen  $T$  nimmt  $z(p)$  ab (da  $\frac{a}{RT} > b$ ), bei großen Temperaturen  $T$  nimmt  $z(p)$  entsprechend zu (da dann  $\frac{a}{RT} < b$ ).

Die spezielle Temperatur  $T_B$ , bei der  $\frac{a}{RT} \equiv b$  heißt Boyle-Temperatur,

$$\boxed{T_B = \frac{a}{Rb}}. \quad (2.4.22)$$

Bei  $T_B$  sind die Abweichungen von  $z(p) = 1$  quadratisch in  $p$ .

### Zahlenbeispiel:

- He:  $a = 3,5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^4 \text{bar}}{\text{Mol}^2}$ ,  $b = 2,37 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{Mol}}$
- $\text{N}_2$ :  $a = 1,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^4 \text{bar}}{\text{Mol}^2}$ ,  $b = 3,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{Mol}}$

### 2.4.4 Isothermen realer Gase

#### 2.4.4.1 Experiment

Wir stellen nun die Diskussion der van der Waals'sche Zustandsgleichung realer Gase (2.4.18) zurück und betrachten folgendes Experiment (cf. Abbildung 2.26). In einem Zylinder befindet sich ein Gas, welches

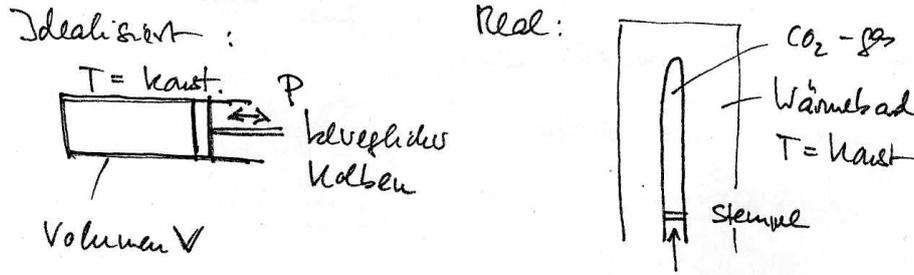


Abbildung 2.26: Gas, welches isotherm komprimiert wird.

durch einen Kolben komprimiert werden kann. Dabei wird die Temperatur des Gases konstant gehalten. Man stellt fest, dass eine Erhöhung von  $p$  zu einer Erniedrigung von  $V$  führt. Die Kurve  $p(V)$  bzw.  $V(p)$  hängt von  $T$  ab, wie in Abbildung 2.27 dargestellt.

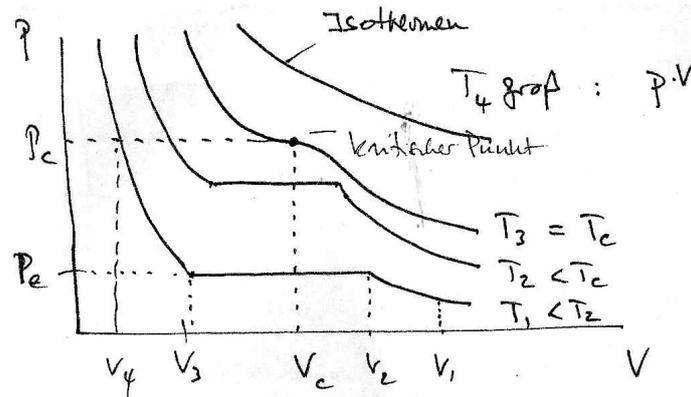


Abbildung 2.27: Beobachtete Isothermen bei der Kompression eines realen Gases.

**Bemerkung:**

- Bei abnehmender Temperatur  $T$  tritt ein Plateau in  $p$  auf, zunächst an einem Punkt  $(V_c, p_c)$ , bei  $T = T_c$ . Dies ist der „kritische Punkt“  $(V_c, p_c, T_c)$ .
- Für  $T_2 < T_c$  ist das Plateau  $p = \text{const}(V)$  ausgedehnt, bei  $T_1 < T_2$  noch ausgedehnter.
- Im Bereich des Plateaus beobachten wir mit abnehmendem Volumen  $V$  eine zunehmende Menge *Flüssigkeit*, genauer: bei  $V_1$  ist das gesamte Volumen gasförmig, bei  $V_2$  taucht eine zunächst winzige

Menge Flüssigkeit auf. Bei  $V_3$  ist das gesamte Volumen flüssig, bei  $V < V_3$  steigt  $p$  stark an, da Flüssigkeiten nahezu inkompressibel sind.

Wir führen nun das gleiche Experiment bei verschiedenen Temperaturen  $T \leq T_c$  durch. Die Endpunkte

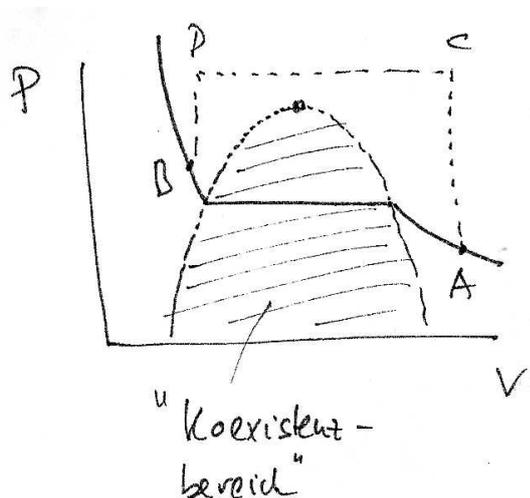


Abbildung 2.28: Die Endpunkte des „Plateaus“ liegen auf einer Glockenkurve.

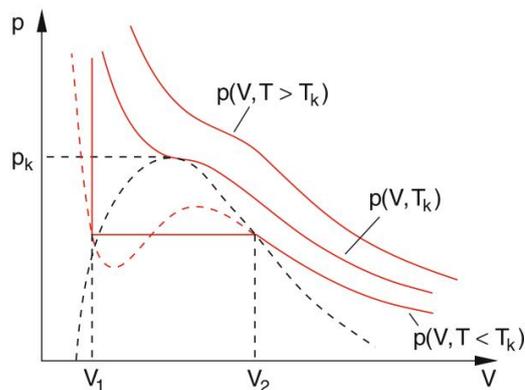


Abbildung 2.29: Van-der-Waals Isothermen in der Nähe vom kritischen Punkt. Der Koexistenzbereich ist schwarz angedeutet.

des Plateaus liegen auf einer Glockenkurve (cf. Abbildung 2.28). Die Kurve beschreibt die Zustände des Systems, das bei  $A$  gasförmig und bei  $B$  flüssig ist. In der schraffierten Fläche koexistieren Flüssigkeit und Gas, außerhalb ist das Gebiet einphasig.

**Bemerkung:**

Es gibt immer eine Trennlinie zwischen beiden Bereichen, gehen wir allerdings über  $C$  und  $D$  von  $A$  nach  $B$ , so schneiden wir keine scharfe Grenzlinie, d.h. Flüssigkeit und Gas können kontinuierlich ineinander übergehen.

**2.4.4.2 Vergleich dieser Beobachtung mit der van der Waals'schen Zustandsgleichung**

Am kritischen Punkt gilt

$$p_c = \frac{RT_c}{\bar{V}_c - b} - \frac{a}{\bar{V}_c^2}$$

Der kritische Punkt ist eine Wendepunkt der zu  $T_c$  gehörigen Isothermen. Es gilt also

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \bar{V}}\right)_{T_c} = 0 = -\frac{RT_c}{(\bar{V}_c - b)^2} + \frac{2a}{\bar{V}_c^3},$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \bar{V}^2}\right)_{T_c} = 0 = \frac{2RT_c}{(\bar{V}_c - b)^3} - \frac{6a}{\bar{V}_c^4}.$$

Löst man diese drei Gleichungen nach  $\bar{V}_c$ ,  $T_c$  und  $p_c$  auf, so ergeben sich

$$\begin{aligned}\bar{V}_c &= 3b, \\ T_c &= \frac{8a}{27 - Rb}, \\ p_c &= \frac{a}{27b^2},\end{aligned}$$

die Werte für den kritischen Punkt. Tabelle 2.1 zeigt für einige Stoffe die Werte des kritischen Punktes.

Gas	$T_K$ (K)	$p_K$ (bar)	$a$ (N · m <sup>4</sup> /mol <sup>2</sup> )	$b$ (10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup> /mol)	$T_I$ (K)	$T_S$ (K), $p_0 = 1,013$ bar
Helium	5,19	2,26	0,0033	24	30	4,2
Wasserstoff	33,2	13	0,025	27	200	20,4
Stickstoff	126	35	0,136	38,5	620	77,4
Sauerstoff	154,6	50,8	0,137	31,6	765	90,2
Luft	132,5	37,2	-	-	650	80,2
CO <sub>2</sub>	304,2	72,9	0,365	42,5	>1000	194,7
NH <sub>3</sub>	405,5	108,9	0,424	37,2	>1000	-
Wasserdampf	647,15	217,0	-	-	-	373,2

**Tabelle 2.1:** Kritische Temperaturen  $T_K$ , kritischer Druck  $p_K$ , van-der-Waals-Konstanten  $a$ ,  $b$ , maximale Inversionstemperatur  $T_I$  und Siedetemperatur  $T_S$  für einige Gase.

Die van der Waals'sche Zustandsgleichung des realen Gases hat für  $T < T_c$  allerdings das in Abbildung 2.30 gezeigte Verhalten, also keine Plateaus zwischen  $A$  und  $C$ . Man kann zeigen, dass der Wert des Plateaus so festgelegt ist, dass die Fläche (in Abbildung 2.30 schraffiert dargestellt) unter  $ADB$  und  $BEC$  identisch sind (Maxell'sche Konstruktion). Der Bereich  $DBE$  ist physikalisch nicht realisierbar, bzw. nicht stabil, denn dort ist  $\frac{\partial p}{\partial V} > 0$ , das kann nicht sein. Die Bereiche  $AD$  und  $BE$  sind möglich, aber *metastabil*, d.h. kleine Störungen bringen den Zustand auf das Plateau.

Die Linien durch alle  $D$  bzw.  $B$  für verschiedene  $T$  nennt man *Spinodale*, die Linie, welche für verschiedene  $T$  durch  $A$  und  $C$  verläuft heißt *Binodale*.

#### 2.4.4.3 Normierte van der Waals'sche Gleichung

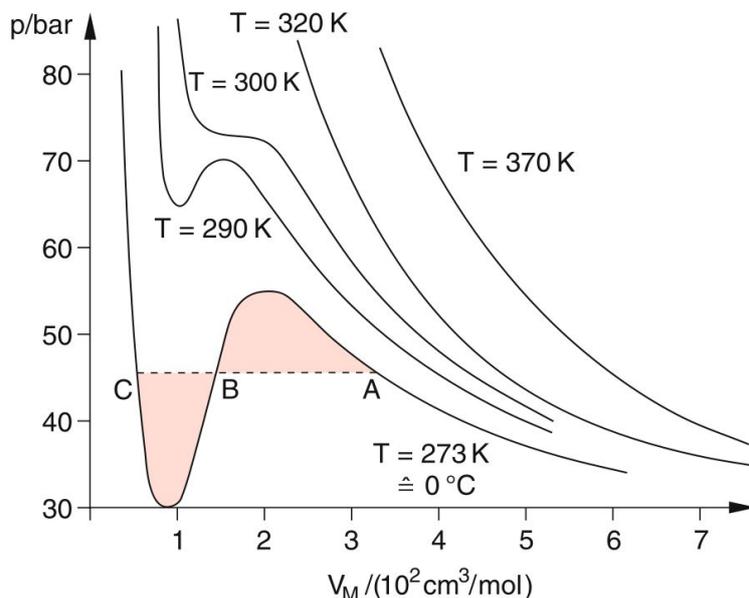
Betrachte  $\pi = \frac{p}{p_c}$ ,  $t = \frac{T}{T_c}$  und  $\nu = \frac{\bar{V}}{\bar{V}_c}$ . Die normierte van der Waals'sche Zustandsgleichung lautet dann

$$\left( \pi + \frac{3}{\nu^2} \right) (3\nu - 1) = 8t. \quad (2.4.23)$$

Diese Gleichung enthält keine Materialparameter.

#### **Bemerkung:**

Bei tiefen Temperaturen können noch andere Phasenübergänge stattfinden, z.B. flüssig-fest, die von der van der Waals'sche Zustandsgleichung nicht beschrieben werden.



**Abbildung 2.30:** Van-der-Waals Isothermen, berechnet mit der van-der-Waals-Gleichung und der tatsächliche Verlauf (gestrichelt).

## 2.5 Thermische Eigenschaften von Materie

### 2.5.1 Spezifische Wärme

Zur Erhöhung der Temperatur eines Körpers (Gas, Flüssigkeit, Festkörper) muss Energie zugeführt werden, da  $T \sim \langle E_{\text{kin}} \rangle$ . Diese Energie heißt *Wärme* ( $\Delta Q$ ). Versuche (Erhitzen von Wasser, Metallen und Gasen bei gleicher Masse auf gleiche Temperatur  $T_2$  von einer Temperatur  $T_1$  aus) zeigen, dass

$$\boxed{\Delta Q = c \cdot M \cdot \Delta T} = cM(T_2 - T_1). \tag{2.5.1}$$

Hierbei ist  $M$  die Masse und  $c$  die spezifische Wärme,  $cM$  die Wärmekapazität und  $C = c \cdot M_{\text{Mol}}$  die molare Wärmekapazität bzw. die spezifische Molwärme.

**Bemerkung:**

- $c$  ist normalerweise eine Funktion der Temperatur;  $c = c(T)$ , daher ist  $c$  keine Materialkonstante

$$c := \frac{1}{M} \frac{dQ}{dt}.$$

- Die Erwärmung der Bremsen eines PKW ist ein Beispiel für die Umwandlung von kinetischer Energie des PKW in eine andere Energieform, d.h. Wärme.

- Diese Energieform „Wärme“ ist speziell, denn im Gegensatz zu anderen Energieformen ( $E_{\text{rot}}$ ,  $E_{\text{kin}}$ , ...) kann sie nicht vollständig in andere Energieformen zurückgewandelt werden. Dies ist Gegenstand des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik, Diskussion in Abschnitt ??.

### 2.5.1.1 Spezifische Wärme des einatomigen idealen Gases

Wir wissen, dass in diesem Fall die mittlere kinetische Energie  $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$  für  $N$  Gasteilchen im Volumen  $V$  ist. Die Teilchen haben drei translatorische Freiheitsgrade (und keine weiteren), so dass eine Zunahme der Energie des Systems durch Heizen nur  $\langle E_{\text{kin}} \rangle$  vergrößern kann, solange  $V = \text{const.}$

**Neuer Begriff:** (Innere Energie  $U$ )

Die innere Energie  $U$  ist die gesamte Energie der Teilchen (hier nur  $E_{\text{kin}}$  wegen Translation, i.A. auch  $E_{\text{rot}}$ ,  $E_{\text{Schwingung}}$ ,  $E_{\text{pot}}$  wegen Wechselwirkung der Teilchen untereinander).

Bei unserer Betrachtung soll  $U$  nur durch die (temperaturbedingte) Bewegung der Teilchen zu Stande kommen, es gilt also

$$U = \frac{3}{2} N k_B T. \quad (2.5.2)$$

Im Allgemeinen muss man noch andere Energieformen berücksichtigen, so dass  $U = \frac{3}{2} N k_B T - E_{\text{Schwingung}} + E_{\text{rot}} + \dots$ . In unserer Betrachtung hängt aber die innere Energie  $U$  nur von der Wärme ab, es gilt also

$$dU = dQ.$$

Bei einem isochoren Prozess, also bei konstantem Volumen folgt

$$c_V = \frac{1}{M} \left( \frac{dU}{dT} \right)_{V=\text{const.}} = \frac{1}{M} \left( \frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{1}{M} \frac{dU}{dT} \Big|_V. \quad (2.5.3)$$

Setzt man (2.5.2) ein, so erhält man für ein ideales Gas bei konstantem Volumen

$$c_V = \frac{3}{2} \frac{N k_B}{M} = \frac{3}{2} N_A \cdot k_B = \frac{3}{2} R = C_V, \quad (2.5.4)$$

wobei  $N_A$  die Avogadrozahl ist. Wir sehen, dass die spezifische Wärme bei konstantem Volumen  $C_V$  nicht von der Temperatur  $T$  abhängt.

Sei nun der Druck konstant, also  $p = \text{const.}$ . Es gilt

$$c_p = \frac{1}{M} \left( \frac{dU}{dT} \right)_{p=\text{const.}} = \frac{1}{M} \frac{dU}{dT} \Big|_p. \quad (2.5.5)$$

Betrachte die Anordnung in Abbildung 2.31. Wegen des idealen Gasgesetzes  $p\bar{V} = RT$  nimmt  $\bar{V}$  mit  $T$  zu, bei konstantem Druck. Es muss jetzt „Expansionsarbeit“ geleistet werden, um das Volumen  $\bar{V}$  um  $d\bar{V}$  gegen den Druck  $p$  zu erhöhen. Diese Arbeit ist gegeben durch  $|\Delta W| = |F \cdot \Delta x|$ , der Kolben (in Abbildung 2.31) wird gegen die Kraft  $F = A \cdot p$  um  $\Delta x$  verschoben und es gilt

$$|\Delta W| = |A \cdot p \cdot \Delta x| = \boxed{|p\Delta V| = |\Delta W|}. \quad (2.5.6)$$

Dies ist die so genannte Ausdehnungsarbeit.

**NB:** Gemäß Konvention, wird am System geleistete Arbeit positiv definiert. In der hier betrachteten

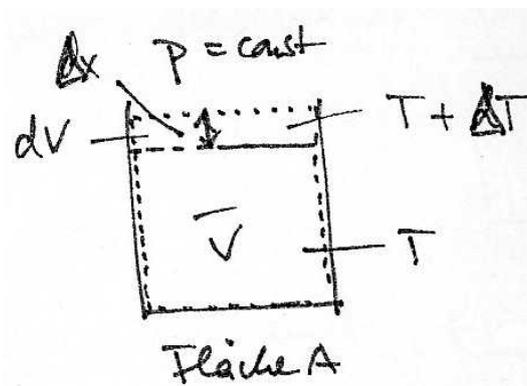


Abbildung 2.31: Auf Gas mit dem Molvolumen  $\bar{V}$  wird über einen Kolben Druck ausgeübt.

Situation leistet das System arbeit, also ist  $\Delta W = -p\Delta V$  mit  $\Delta V > 0$  (Volumenzunahme), d.h.  $dU = C_V\Delta T - \Delta W$ .

Diese Arbeit  $\Delta W$  muss dem Gas zusätzlich zu  $C_V\Delta T$  als Wärme zugeführt werden, so dass  $C_p > C_V$ . Für die Wärmeänderung bei konstantem Druck gilt dann

$$\Delta Q = C_V \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V = \Delta U. \quad (2.5.7)$$

Wegen  $p\bar{V} = RT \Rightarrow \Delta V = \frac{R}{p}\Delta T$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{\Delta T} &= C_V + R \frac{\Delta T}{\Delta T} \\ \rightarrow C_p &= C_V + R. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Man führt nun den Adiabatenkoeffizient  $\kappa$  ein, mit

$$\kappa := \frac{C_p}{C_V} \equiv \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{C_V} = 1 + \frac{2}{3}.$$

Bei einem idealen Gas gilt also  $\kappa = \frac{5}{3}$ . In der Praxis misst man oft  $C_p$ , da im Labor  $p = \text{const} = 1\text{bar}$ .

Im einatomigen idealen Gas hatten wir  $f = 3$  Freiheitsgrade (der Translation), damit also  $C_V = \frac{f}{2}R$  im Allgemeinen, es gilt daher allgemeiner

$$\kappa = \frac{f+2}{f}. \quad (2.5.9)$$

### 2.5.1.2 Beispiele mit $f > 3$

- Einatomige Gase

Eine Kugel mit endlichem Radius  $r > 0$  kann sich um drei unabhängige Achsen drehen, es gibt also  $f = 6$  Freiheitsgrade (cf. Abbildung 2.32). Damit folgt  $C_V = \frac{f}{2}R = 3R$ .

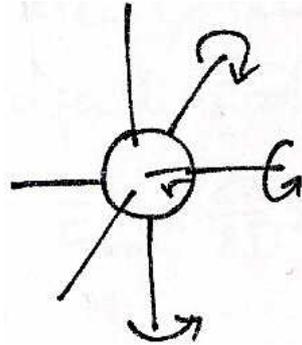


Abbildung 2.32: Freiheitsgrade einer Kugel

**NB:** Experimente u  $C_V$  bei  $T = 300\text{K}$  an Helium-Atomen geben allerdings nur  $C_V = \frac{3}{2}R$ , so dass man schließen muss, dass sich die He-Atome bei  $T = 300^\circ\text{C}$  nicht drehen. Wir werden in der Quantenmechanik verstehen, warum das so ist.

**Vorgriff:** Der Drehimpuls  $L$  kann nicht beliebige Werte annehmen, sondern nur solche mit  $L^2 = l(l + 1)\hbar^2$ ;  $l = 1, 2, \dots$ ;  $L_{\min} = \sqrt{2}\hbar$ . Die Rotationsenergie der Kugel ist  $E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I}$  und somit ebenfalls quantisiert,  $E_{\text{rot}} = 0, \frac{2\hbar^2}{2I}, \dots$ . Da  $I = \frac{2}{5}mr^2$  für He sehr klein ist, liegt  $E_{\text{rot}} = \frac{2\hbar^2}{2I}, l = 1$  weit oberhalb  $k_B T$ . He-Atome rotieren also in der Tat nicht bei 300K.

- zweiatomige Gase ( $\text{He}_2, \text{O}_2, \text{N}_2, \dots$ )

Neben den drei Translationsfreiheitsgraden gibt es im Prinzip drei Rotationsfreiheitsgrade, von

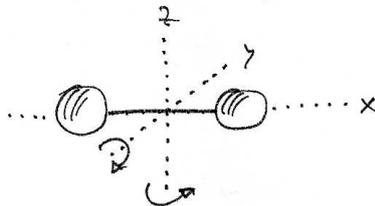


Abbildung 2.33: Freiheitsgrade eines zweiatomigen Moleküls.

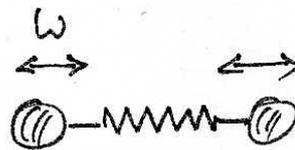


Abbildung 2.34: Die Atome schwingen zueinander.

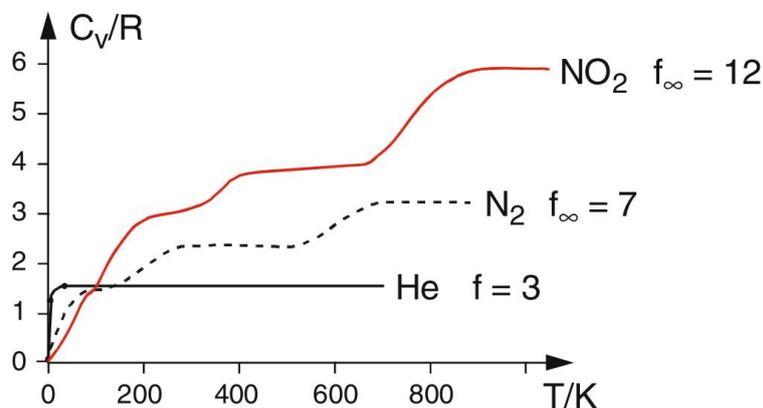
denen aber nur die um die  $y$ - und  $z$ -Achse genügend großes  $I$  haben, so dass  $E_{\text{rot}} = \frac{2\hbar^2}{2I} > k_B T$ . Damit haben wir  $f_{\text{rot}} = 2$ . Dazu kommen zwei Schwingungsfreiheitsgrade, deren Energien  $E_\omega$  nach der Quantenmechanik auch quantisiert sind.  $E_\omega = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Damit haben wir  $f_\omega = 2$ , allerdings ist  $\frac{1}{2}\hbar\omega > \frac{\hbar^2}{T}$ , es treten also keine Schwingungen auf bei  $T < 600\text{K}$ . Es gilt insgesamt

$$f = f_{\text{trans}} + f_{\text{rot}} + f_\omega = 3 + 2 + 2 = 7$$

und somit

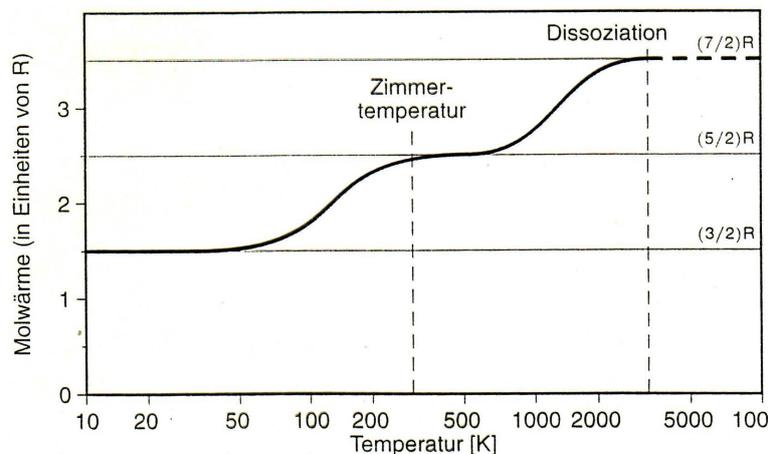
$$C_V = \frac{7}{2} \quad \text{bzw.} \quad \kappa = \frac{9}{7}.$$

- Überlegen Sie, warum man bei  $\text{NO}_2$   $f = 12$  erhält. Der Temperaturverlauf von  $e$ ,  $\text{N}_2$  und  $\text{NO}_2$  ist in Abbildung 2.35 dargestellt. Man sieht, dass Rotationsfreiheitsgrade für  $\text{N}_2$  erst ab ungefähr



**Abbildung 2.35:** Temperaturverlauf der molaren Wärmekapazität von Helium,  $\text{N}_2$  und Stickstoffdioxid  $\text{NO}_2$ .

250K angeregt werden, die Schwingungsfreiheitsgrade sogar erst bei ungefähr 700K.  $C_V$  ist also von der Temperatur abhängig ( $\rightarrow C_V(T)$ ).  $\text{H}_2$  dissoziiert, wenn Schwingungen angeregt werden ( $T \approx 3200\text{K}$ ), cf. Abbildung 2.36.



**Abbildung 2.36:** Temperaturverlauf der spezifischen Wärme pro Mol  $C_V$  von molekularem Wasserstoff ( $\text{H}_2$ ). Oberhalb von ca. 3200K dissoziiert das Molekül.

- Festkörper (Einkristall)

Da festkörper wenig kompressibel sind, ist  $C_V \approx C_p = C$ . Wir verwenden für einen Festkörper folgendes Modell: Atome sind Kugeln, die via Federn wechselwirken. Sie sind periodisch im Raum

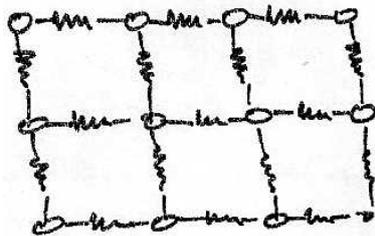


Abbildung 2.37: Modell eines Festkörpers mit Federn.

positioniert (cf. Abbildung 2.37). In diesem Modell gilt  $f_{\text{trans}} = 0$  (Gitter),  $f_{\text{rot}} = 0$  (kleine Kugeln),  $f_{\omega} = 6 = 2 \cdot 3$  Raumrichtungen. Damit gilt das *Dulong-Petit-Gesetz*

$$C_V = 6 \cdot \frac{R}{2} = 3R \quad (2.5.10)$$

Wie bei den zweiatomigen Molekülen sind die Werte von  $E_{\omega} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  quantisiert und  $\frac{\hbar\omega}{2} \gg k_B T_{\text{Vakuum}}$

Der qualitative Verlauf von  $C_V(T)$  wird in Abbildung 2.38 dargestellt. Tabelle 2.2 zeigt die spezifische

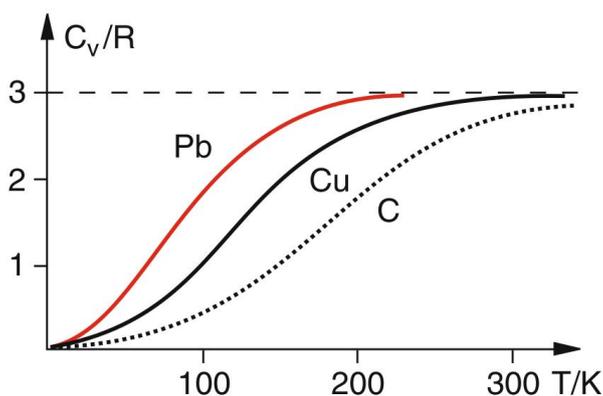


Abbildung 2.38: Qualitativer Verlauf der Temperaturabhängigkeit der molaren Wärmekapazität verschiedener Festkörper.

Wärmekapazität einiger Stoffe.

## 2.5.2 Adiabatische Zustandsänderung des idealen Gases

Eine *adiabatische* Zustandsänderung ist eine Zustandsänderung ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung, es gilt also  $\Delta Q = 0$ . Bewerkstelligt wird dies durch

Stoff	$c(\text{kJkg}^{-1}\text{K}^{-1})$	$\lambda_S(\text{kJkg}^{-1})$	$\lambda_V(\text{kJkg}^{-1})$
Wasser	4,182	-	2256
Äthylalkohol	2,43	-	840
Quecksilber	0,14	12,4	285
Aluminium	0,896	397	10900
Eisen	0,45	277	6340
Gold	0,13	65	16500
Kupfer	0,383	205	47900
Eis (0°C)	2,1	332,8	-

**Tabelle 2.2:** Spezifische Wärmekapazität  $c$  bei 20°C und 1013,25 hPa, spezifische Schmelzwärme  $\lambda_S$  und spezifische Verdampfungswärme  $\lambda_V$  einiger Stoffe.

- Gute Isolation des Systems von der Außenwelt,
- Schnelle Zustandsänderung, so dass ein Wärmefluss nach außen noch kaum stattfinden kann.

Die gesamte Kompressionsarbeit  $dW = +pd\bar{V}$ , die dem System von außen zugeführt wird, wird in die Erhöhung der inneren Energie, beim idealen Gas also in die Erhöhung der kinetischen Energie der Teilchen, gesteckt. Das Gas mit

$$pd\bar{V} = -C_V dT$$

erwärmt sich ( $dT > 0$ ). Mit  $p = \frac{RT}{\bar{V}}$  folgt

$$C_V = \frac{dT}{T} = -R \frac{d\bar{V}}{\bar{V}}.$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} C_V \ln(T) &= -R \ln(\bar{V}) + \text{const} \\ \ln(T^{C_V} \cdot \bar{V}^R) &= \text{const} \end{aligned}$$

Mit  $R = C_p - C_V$  wird dies zu

$$\begin{aligned} \ln(T^{C_V} \bar{V}^{C_p - C_V}) &= \text{const} \\ T^{C_V} \bar{V}^{C_p - C_V} &= \text{const}' \\ T \bar{V}^{\frac{C_p - C_V}{C_V}} &= \text{const}'' \end{aligned}$$

Es folgen mit  $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$  die Adiabategleichungen für ein ideales Gas

$$\boxed{T \cdot \bar{V}^{\kappa-1} = \text{const}} \quad (2.5.11)$$

und mit  $T = \frac{p\bar{V}}{R}$

$$\boxed{p \cdot \bar{V}^{\kappa} = \text{const.}} \quad (2.5.12)$$

Abbildung 2.39 zeigt, dass die Adiabate im  $p$ - $V$ -Diagramm steiler verläuft als die Isotherme. Dies hat zur Konsequenz, dass bei adiabatischer Kompression bzw. Dilatation die Temperatur steigt bzw. fällt.

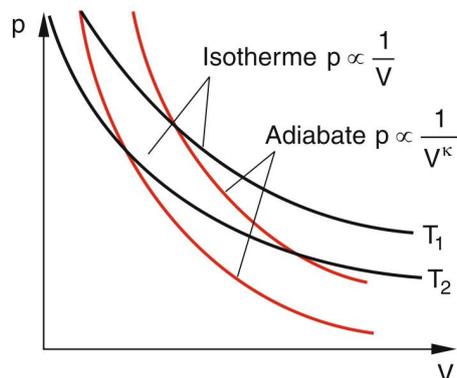


Abbildung 2.39: Isothermen und Adiabaten in einem  $p$ - $V$ -Diagramm

### 2.5.3 Anmerkungen zu Phasenübergängen

Wir kennen schon diverse Aggregatzustände der Materie, z.B. fest, flüssig, gasförmig, Plasma. Es gibt aber noch weitere, z.B. flüssige Kristalle (cf. Abbildung 2.40). Auch ein gegebener Aggregatzustand kann

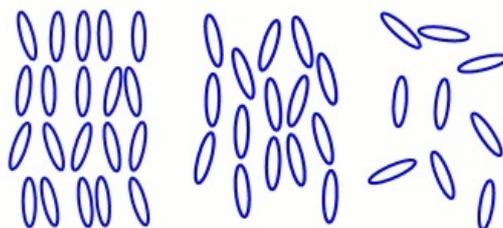


Abbildung 2.40: Links: smektische Anordnung, Orientierungsordnung und Translationsordnung in einer Richtung ( $z$ ), sonst flüssig. Mitte: nematische Anordnung, orientierungsgeordnete Flüssigkeit. Rechts: Isotrope Anordnung.

verschiedene Phasen haben, die sich durch eine physikalische Eigenschaft unterscheiden, z.B.

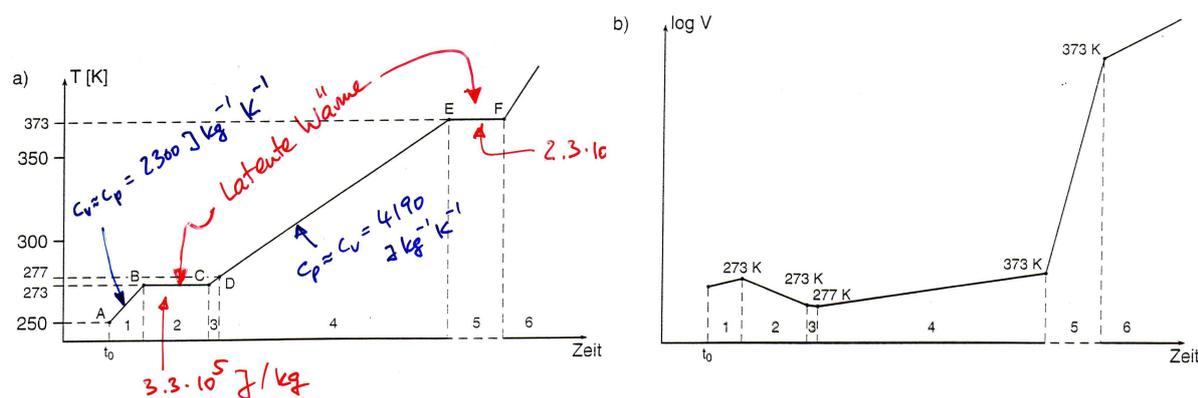
- kubische Struktur - rhombische Struktur des Kristallgitters
- ferromagnetisch - paramagnetisch
- ferroelektrisch - dielektrisch
- Metall - Isolator
- supraleitend - normal leitend
- superfluide Flüssigkeit - viskose Flüssigkeit

Diese Eigenschaften entsprechen physikalischen Messgrößen, wie beispielsweise Gitterkonstante, Molvolumen, Leitfähigkeit, Magnetisierung. Dies sind *Ordnungsparameter*.

Die Phasenübergänge erfolgen durch Änderungen von  $P, T, (B, E, \text{etc. pp.})$ . Wir wollen kurz ein aktuelles Beispiel betrachten, das temperaturabhängige Verhalten von Eis bei konstantem Druck und konstanter Masse.

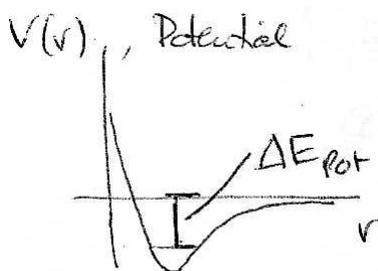
**Versuch:**

Erwärmung von Eis mit konstanter Wärmestruktur  $\frac{dQ}{dt}$ . Wir messen die zeitliche Änderung der Temperatur  $T(t)$ . Das Ergebnis wird in Abbildung 2.41 gezeigt.



**Abbildung 2.41:** Die Änderung der Temperatur (a) und des Volumens (b) von Eis. Wasser und Wasserdampf bei Zuführung eines zeitlich konstanten Wärmestroms.

- Für  $T < T_c = 273,15\text{K}$  ist das Eis nahezu inkompressibel, daher  $C_p \approx C_v = 2300\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Bei  $T_c$  bleibt  $T$  eine gewisse Zeit konstant (!), obgleich weiterhin Wärme einströmt. Offenbar erhöht sich die kinetische Energie der Moleküle nicht (in diesem Zeitintervall  $t_2 - t_1$ ), sondern die potentielle Energie. Die  $\text{H}_2\text{O}$ -Moleküle werden aus ihren Potentialtöpfen im Eiskristall herausgehoben (cf. Abbildung 2.42). Die Größe



**Abbildung 2.42:** Potential  $V$  der Moleküle im Eiskristall.  $r$  ist der Molekülabstand.

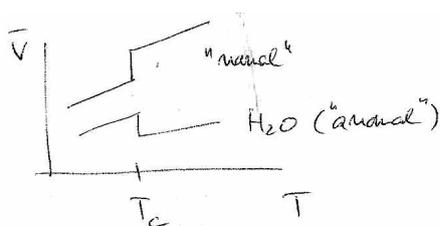
$$Q_L = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dQ}{dt} dt$$

ist die benötigte Wärme (*latente Wärme*), hier auch *Schmelzwärme*,  $Q_L = N \cdot \Delta E_{\text{pot}}$ . Hier ist  $Q_L = 3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ .

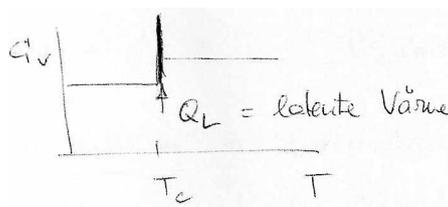
- Für  $T < T_c$  und  $T < T_k = 373\text{K}$  nimmt  $T(t)$  zu, mit  $C_p \sim C_V = 4190\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$  für Wasser.
- Bei  $T = T_k$  kocht das Wasser, wieder muss  $E_{\text{pot}}$  erhöht werden (um die  $\text{H}_2\text{O}$ -Moleküle aus dem flüssigen Zustand in die Gasphase zu bringen), daher ist auch hier  $T = \text{const}$  für einige Zeit. Jetzt ist  $Q_L = 2,3 \cdot 10^6\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Man benötigt also mehr Energie zum Verdampfen als zum Schmelzen.
- NB.: Insgesamt ist das  $(P, V, T)$ -Diagramm von  $\text{H}_2\text{O}$  recht kompliziert, mit diversen Phasen von Eis noch komplizierter.

### Klassifizierung von Phasenübergängen

- Phasenübergang 1. Ordnung:



**Abbildung 2.43:** Ordnungsparameter (hier  $\bar{V}$ ) in Abhängigkeit von  $T$  beim Phasenübergang 1. Ordnung.



**Abbildung 2.44:** Molare Wärmekapazität in Abhängigkeit von  $T$  beim Phasenübergang 1. Ordnung.

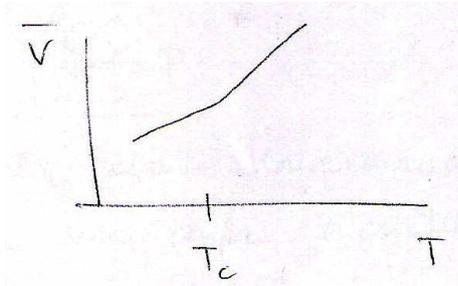
- Phasenübergang 2. Ordnung:  
Kontinuierliche Änderung des Ordnungsparameters; keine latente Wärme. Es kommt keine Koexistenz zweier Phasen vor.

## 2.6 Die Hauptsätze der Thermodynamik

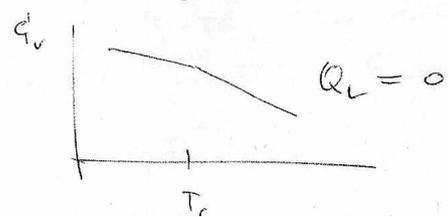
### 2.6.1 Der erste Hauptsatz

Bisher haben wir drei Größen kennengelernt, die den Gleichgewichtszustand eines Systems festlegen. Dies sind  $(P, V, T)$ , auch Zustandsgrößen genannt. Im Phasendiagramm bestimmen sie einen Punkt, welcher eine gewisse innere Energie  $U$  hat. Wollen wir von einem Zustand 1 mit  $(P_1, V_1, T_1)$  zu einem Zustand 2 mit  $(P_2, V_2, T_2)$ , so lässt sich dies durch Übertrag von Wärme  $\Delta Q$  oder mechanischer Energie  $\Delta W$  bewerkstelligen. Bei Volumenänderung unter konstantem Druck gilt:

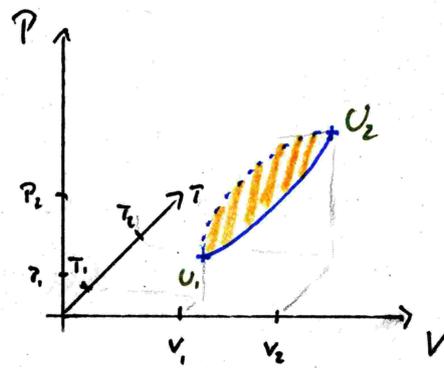
$$\Delta W = -PdV, \tag{2.6.1}$$



**Abbildung 2.45:** Ordnungsparameter (hier  $\bar{V}$ ) in Abhängigkeit von  $T$  beim Phasenübergang 2. Ordnung.



**Abbildung 2.46:** Molare Wärmekapazität in Abhängigkeit von  $T$  beim Phasenübergang 2. Ordnung.



**Abbildung 2.47:** Phasendiagramm

wobei per Konvention bei Kompression  $dV < 0$  gilt, und die Arbeit  $\Delta W > 0$  ist, da dem System Arbeit zugeführt wird. Die Gesamtarbeit  $W$ , um von  $V_1$  nach  $V_2$  zu kommen, ist

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV \quad (2.6.2)$$

Wir können nun verschiedene Wege wählen, um von Zustand 1 zum Zustand 2 zu gelangen, zum Beispiel auf einer Isotherme oder auf einer Adiabate. Dabei erhalten wir in der Regel unterschiedliche Funktionen  $P_A(V)$  und  $P_B(V)$  für den Druck, so dass im Allgemeinen gilt

$$W_A = - \int_{V_1}^{V_2} P_A(V) dV \quad \neq \quad W_B = - \int_{V_1}^{V_2} P_B(V) dV.$$

$W$  ist wegababhängig, d.h. Arbeit ist keine Zustandsvariable im Gegensatz zu  $P$ ,  $V$  und  $T$ ! Wir können einen Kreisprozess ausführen, d.h. von 1 über Weg A nach 2 und über Weg B wieder zurück nach 1 gehen. Offenbar ist dann  $W_B - W_A$ , die eingeschlossene Fläche im Phasendiagramm, die am System geleistete Arbeit.

Betrachten wir die *Energiebilanz* eines Prozesses  $1 \rightarrow 2$ :

$$\boxed{\Delta U = U_2 - U_1 = \Delta Q + \Delta W.} \quad (2.6.3)$$

Dies entspricht dem Energieerhaltungssatz, da  $\Delta U$  die Änderung der inneren Energie darstellt,  $\Delta Q$  die von außen zugeführte Wärme und  $\Delta W$  die am System verrichtete Arbeit.

#### **Nebenbemerkung:**

Dies ist kompatibel mit allen bisher durchgeführten Experimenten, aber sonst nicht ableitbar oder theoretisch tiefer begründbar. Dies ist also ein *Axiom*.

Da im Kreisprozess Anfangs- und endpunkt gleiche Temperatur haben, gilt

$$\Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_B - W_A = Q.} \quad (2.6.4)$$

Wärme ist also vollständig äquivalent bzw. konvertierbar in mechanische Arbeit. Allerdings kann eine Maschine, die einen solchen Kreisprozess durchläuft, nie mehr Arbeit erzeugen, wie ihr an Wärme zugeführt wird: Es gibt kein Perpetuum Mobile erster Art.

Läuft ein Kreisprozess so, dass Bahn und Rückweg identisch sind, also  $W_A = W_B$ , dann ist offenbar  $Q = 0$ . Ein solcher Prozess heißt reversibel. Hier ist nach Durchlaufen eines Zyklus keine Veränderung in der Umgebung bemerkbar. Ist  $Q \neq 0$ , so ist der Prozess irreversibel und der Umgebung wurde Wärme z.B. durch Reibung übertragen oder entzogen.

### 2.6.2 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Auch dieser Hauptsatz ist axiomatisch, d.h. er basiert auf unwiderlegten Beobachtungen und ist nicht tiefer begründbar. Man beobachtet, dass gewisse Prozesse immer nur in einer Richtung ablaufen. So verteilen sich Gasmoleküle trotz anfänglicher Ungleichverteilung gleichmäßig im ganzen zur Verfügung stehenden Raum und Temperaturen zweier in Kontakt stehender Körper gleichen sich an. Der zweite Hauptsatz lässt sich daher auf mehrere Weisen äquivalent formulieren:

- Wärme fließt immer vom wärmeren zum kälteren Körper, nie umgekehrt.

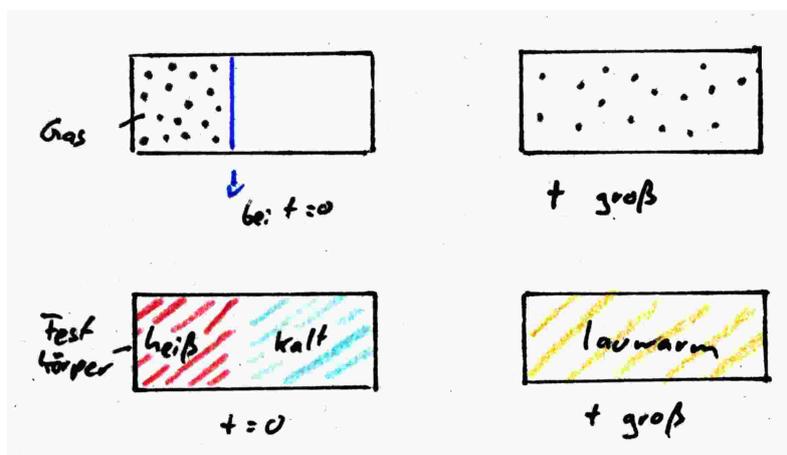


Abbildung 2.48: Prozesse, die zum Gleichgewicht streben

- Das System strebt immer dem Gleichgewichtszustand zu. Dieser liegt auf der Zustandsfläche.
- Arbeit kann vollständig in Wärme umgewandelt werden, Wärme aber nicht vollständig in Arbeit.
- Der thermische Wirkungsgrad  $\eta$  einer Maschine ist immer  $< 1$ .
- Die Entropie  $S$  eines Systems kann nur zunehmen bzw. gleich bleiben,  $\Delta S \geq 0$ .

Alle diese Formulierungen sind äquivalent und keine lässt sich aus dem ersten Hauptsatz ableiten, denn keines von ihnen kann mit Energieerhaltung erklärt werden. Das bedeutet, wir brauchen eine neue Zustandsgröße. Diese wird die Entropie  $S$  sein.

### 2.6.3 Der Carnot-Prozess

Nicolas Léonard Sadi Carnot schlug 1824 nachfolgendes Gedankenexperiment vor. Es handelt sich dabei um einen reversiblen Kreisprozess in 4 Schritten (cf. Abbildung 2.49 und 2.50).

- **1. Schritt:** Das System befindet sich bei  $(P_1, V_1, T_1)$ . Es ist an  $T_1$  gekoppelt und wird isotherm auf  $(P_2, V_2, T_1)$  geführt, indem der Kolben herausgedrückt wird.
- **2. Schritt:** Adiabatische Dilatation auf  $(P_3, V_3, T_2)$ .
- **3. Schritt:** Ankopplung an  $T_2$ -Wärmebad isotherme Kompression auf  $(P_4, V_4, T_2)$ .
- **4. Schritt:** Adiabatische Kompression auf den Ausgangspunkt  $(P_1, V_1, T_1)$ .

Alle vier Änderungen werden auf Zustandsflächen, also reversibel ausgeführt. Betrachten wir die *Energiebilanz* im Carnotprozess.

- **1. Schritt:**  $T = \text{konst.}$ , das bedeutet  $U = \text{konst.}$  und damit  $dQ = p dV$ :

$$\Delta Q_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_1 \cdot \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = -\Delta W_{12}.$$

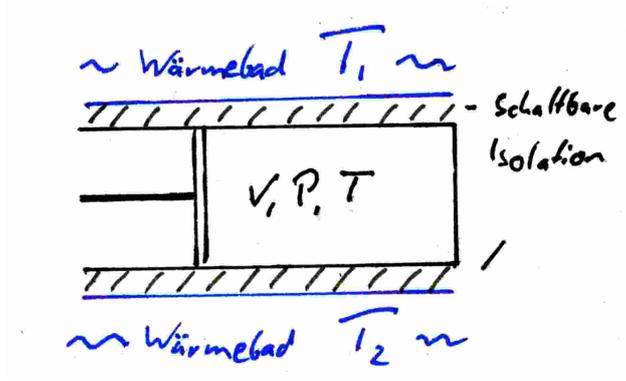


Abbildung 2.49: Carnotmaschine

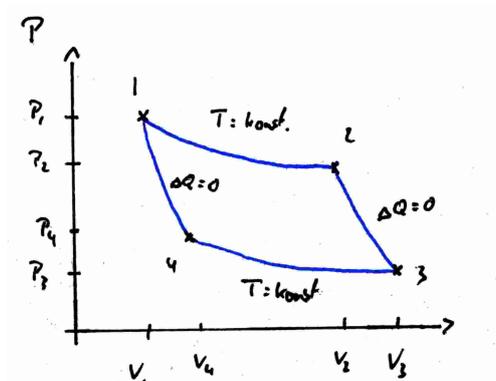


Abbildung 2.50: Carnotprozess

Die einfließende Wärme entspricht also der Arbeit des Systems zur Expansion von 1 nach 2.

- **2. Schritt:** Auf der Adiabaten gilt  $dQ = 0$ ,  $dU = -p dV$ . Bei steigendem Volumen bedeutet dies sinkende Temperatur:  $dU < 0$  und es gilt

$$\begin{aligned}\Delta U &= U(T_2) - U(T_1), \\ \Delta W_{23} &= -\Delta U = -c_V \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT = c_V \cdot (T_1 - T_2).\end{aligned}$$

- **3. Schritt:** Wie der erste Schritt, nur wird der Prozess in der anderen Richtung durchlaufen. Es gilt wieder:

$$\Delta Q_{34} = RT_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} = -\Delta W_{34}$$

- **4. Schritt:** Genau wie Schritt 2, bloß mit umgekehrtem Vorzeichen:

$$\Delta W_{41} = -c_V \cdot (T_1 - T_2)$$

Für die Gesamtenergie folgt wegen  $\Delta W_{23} = -\Delta W_{41}$

$$\Delta W_{\text{total}} = \Delta W_{12} + \Delta W_{34} = RT_1 \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) + RT_2 \ln \left( \frac{V_3}{V_4} \right). \quad (2.6.5)$$

Über die Adiabatengleichung erhalten wir

$$T_1 V_2^{\kappa-1} = T_2 V_3^{\kappa-1} \quad \text{und} \quad T_2 V_4^{\kappa-1} = T_1 V_1^{\kappa-1}$$

Daraus folgt für deren Quotienten

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{T_2} &= \left( \frac{V_3}{V_2} \right)^{\kappa-1} = \left( \frac{V_4}{V_1} \right)^{\kappa-1} \\ \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} &= \frac{V_3}{V_4}\end{aligned}$$

und somit ist

$$\ln \left( \frac{V_3}{V_4} \right) = -\ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right). \quad (2.6.6)$$

Die Gesamtarbeit berechnet sich dann zu

$$\Delta W_{\text{total}} = R \cdot (T_1 - T_2) \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right), \quad (2.6.7)$$

welche dann aus Sicht der Maschine negativ ist, da sie diese ja leistet. Wir haben also eine Wärmekraftmaschine, die aus dem oberen Bad die Wärme  $\Delta Q_{12}$  entnimmt und die Arbeit  $\Delta W_{\text{total}}$  verrichtet. Sie hat damit den Wirkungsgrad (aus der Sicht der Außenwelt):

$$\eta_c = \frac{\Delta W_{\text{total}}}{\Delta Q_{12}} = \frac{R \cdot (T_1 - T_2) \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right)}{RT_1 \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right)} \quad (2.6.8)$$

$$= \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (2.6.9)$$

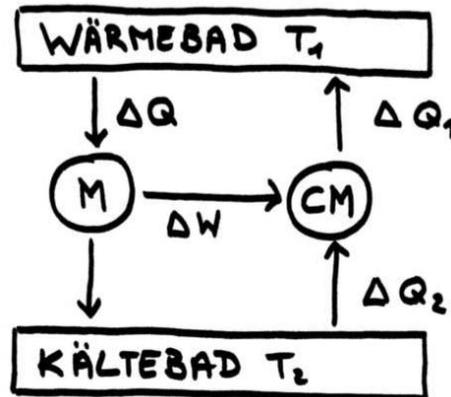


Abbildung 2.51: Carnot- und Wundermaschine

Der Wirkungsgrad der Carnotmaschine ist  $\eta_c < 1$ , sofern  $T > 0$ . Er nimmt mit steigender Temperaturdifferenz zu. Ein Teil der Wärme,  $\Delta Q_{34}$ , geht nämlich ungenutzt an das untere Wärmebad. Wegen der Reversibilität aller 4 Schritte ist auch der umgekehrte Kreisprozess möglich, dann wird Wärme vom Bad  $T_3$  (kälter) zum Bad  $T_1$  (wärmer) transportiert. Dies entspricht der Funktion einer *Wärmemaschine* bzw. *Kältemaschine* wie z.B. einen Kühlschrank.

Durch nachfolgende Überlegungen werden wir zu der Aussage „Keine periodisch arbeitende Maschine hat einen Wirkungsgrad  $\eta > \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \eta_c$ “ gelangen.

Nun betrachten wir die Carnotmaschine als Wärmepumpe. Sie braucht die Arbeit  $\Delta W$ , um  $\Delta Q_1$  an 1 abzugeben, bei der Aufnahme von  $\Delta Q_2$  aus 2.

$$|\Delta Q_1| = |\Delta Q_2| + |\Delta W|$$

Die zweite Maschine M habe ein  $\eta > \eta_c$ . Um  $\Delta W$  an Arbeit zu leisten, braucht sie daher weniger Wärme  $\Delta Q$  aus 1. Insgesamt wärmt also das Gesamtsystem M+CM das Bad 1, aus dem kälteren Bad 2, auf, und zwar ohne äußere Einwirkung. Dies widerspricht dem 2. Hauptsatz.  $\Rightarrow \eta_c$  ist der maximale Wirkungsgrad einer Maschine. Wir können also eine sechste Formulierung des zweiten Hauptsatzes angeben:

- „Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die ohne äußere Energiezufuhr ein Wärmereservoir abkühlt und die dabei gewonnene Wärmeenergie vollständig in Arbeit (= mechanische Energie) umwandelt.“
- „Es gibt kein perpetuum mobile 2. Art“

## 2.7 Entropie und Irreversibilität

### 2.7.1 Reversibilität versus irreversible Prozesse

Als Beispiel für einen reversiblen Prozess kann man den elastischen Stoß von 2 Teilchen (Abb.2.52) betrachten. Energie- und Impulserhaltung liefern die auslaufenden Richtungen und Geschwindigkeiten

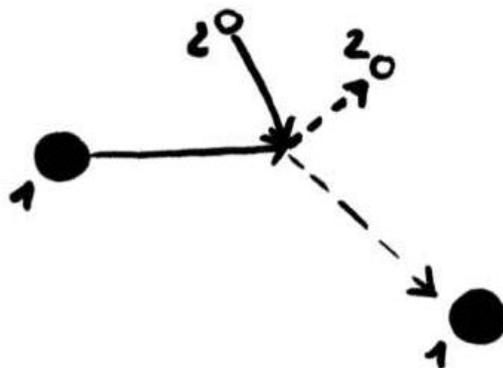


Abbildung 2.52: Reversibler Prozess

beider Teilchen. Durch Zeitumkehr  $t \rightarrow -t$  ist dieser Prozess vollständig umkehrbar (rückwärts laufender Film). Ein irreversibler Prozess wäre beispielsweise der Stoß einer Stahlkugel und einer Glaskugel (Abb. 2.53). Die Glaskugel wird durch die Stahlkugel in viele wegfliegende Splitter zerlegt. Zeitumkehr wird vermutlich nicht zur „Rekonstruktion der Glaskugel“ führen, obgleich das im Prinzip möglich wäre.

Der reversible Prozess unterscheidet sich vom irreversiblen offenbar durch die Tatsache, dass im irreversiblen Prozess (Glaskugel) viele Splitter mit vielen Richtungen und Geschwindigkeiten entstehen, wohingegen beim ersten Fall (zwei Kugeln) nur zwei Richtungen und Geschwindigkeiten vorliegen. Der zweite Prozess führt zu vielen möglichen Zuständen, jeder einzelne davon hat nur kleine Wahrscheinlichkeit.

$\Rightarrow$  Irreversibilität  $\hat{=}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{viele Zustände!} \\ \text{kleine Wahrscheinlichkeit des einzelnen Endzustands!} \end{array} \right.$

Wir brauchen ein Maß für die Irreversibilität, die Anzahl der Zustände. Dies wird die *Entropie*  $S$  sein, sodass wir sehen werden:

- Bei irreversiblen Prozessen nimmt  $S$  zu;  $\Delta S > 0$
- Bei reversiblen Prozessen bleibt  $S$  konstant;  $\Delta S = 0$ .

## 2.7.2 Entropie

### 2.7.2.1 Reversibler Prozess

Betrachten wir beispielhaft den Carnot-Prozess. Wir können von 1 nach 3 über verschiedene Wege gehen:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  oder  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ . Wir betrachten die Größe  $\frac{dQ}{dT} :=$  *reduzierte Wärmemenge* entlang beider Wege. Wir hatten

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Q_{12} = RT_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \\ \Delta Q_{43} = +RT_2 \ln \left( \frac{V_3}{V_4} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \frac{\Delta Q_{12}}{T_1} \right| = \left| \frac{\Delta Q_{43}}{T_2} \right|$$

Die reduzierten Wärmemengen hängen nicht vom Weg ab! Wir definieren  $dS = \frac{dQ}{T} =$  Änderung der „Entropie“  $S$ . Beim Übergang von 1 nach 3 hängt  $\Delta S$  nicht vom Weg ab,  $S$  ist also eine *Zustandsgröße*.

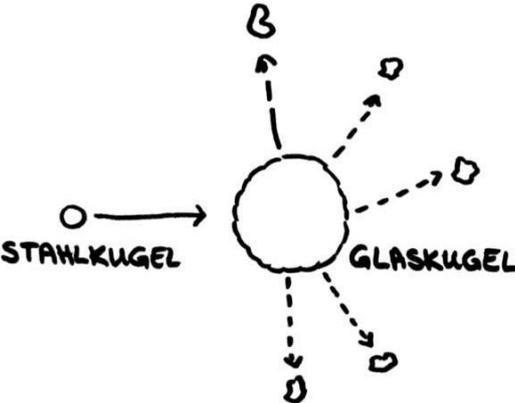


Abbildung 2.53: Irreversibler Prozess

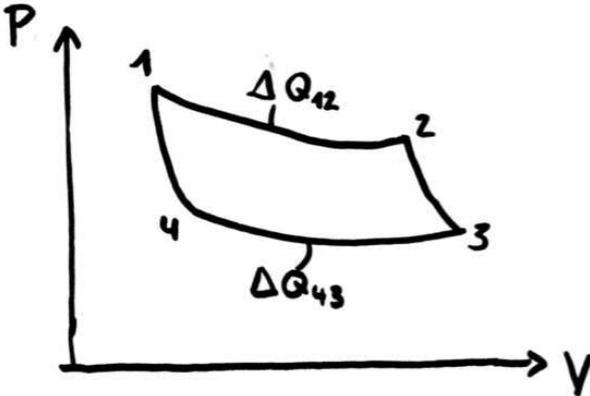


Abbildung 2.54: Carnot-Prozess



Abbildung 2.55: Reversibler Gesamtprozess - Irreversibler Einzelprozess

Speziell beim Carnotprozess gilt:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \pm R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

D.h. insgesamt ist  $\Delta S = 0$  beim reversiblen Kreisprozess und  $S = \text{const.}$

N.B.: Ideales Gas:

$$\begin{aligned} dQ &= dU + pdV \Rightarrow dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + pdV}{T} \\ \text{mit } dU &= C_V dT \text{ und } p\bar{V} = RT \\ \Rightarrow dS &= C_V \frac{dT}{T} + R \frac{d\bar{V}}{\bar{V}} \\ \Rightarrow \text{für } p &= \text{const.} \\ \Delta S \Big|_p &= C_V \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \\ \Rightarrow \text{für } V &= \text{const.} \\ \Delta S \Big|_V &= C_P \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \end{aligned}$$

### 2.7.2.2 Irreversible Prozesse

Betrachte den in Abbildung 2.55 dargestellten Prozess. Dieser Prozess ist reversibel für das Gesamtsystem. Aber: Der Körper alleine betrachtet hat im Schritt 1 die Wärme  $\Delta Q = C_V \int_{T_1}^{T_2} dT$  abgegeben. Also ist seine Entropieänderung  $dS = \frac{dQ}{T}$ ;  $\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} dS = C_V \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) < 0$  im Schritt 1, hat also Entropie verloren. Das Gas hat Entropie gewonnen. Schritt 1 ist ein irreversibler Prozess für den Körper allein. Es gilt also  $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$  auch für irreversible Prozesse. *Bei irreversiblen Prozessen in abgeschlossenen Systemen nimmt die Entropie  $S$  immer zu,  $\Delta S > 0!$*

#### Dazu 3 Beispiele:

- (A) In Abbildung 2.56 sind identische Körper gezeigt mit unterschiedlichen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ . Sie haben die Wärmemengen  $Q_1 = mcT_1$ ;  $Q_2 = mcT_2$  gespeichert. Durch Wärmestrom von 1

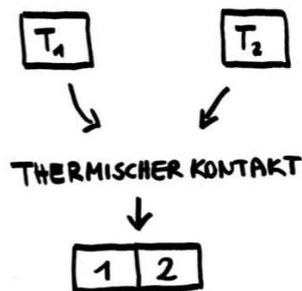


Abbildung 2.56: Thermischer Kontakt zwischen zwei Körpern

nach 2 ergibt sich eine neue mittlere Temperatur  $T_m$ . Aus den Überträgen

$$\Delta Q_1 = mc(T_m - T_1)$$

$$\Delta Q_2 = mc(T_2 - T_m)$$

und  $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$

folgt  $T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$ .

Für  $\Delta S_1$ , die Entropieänderung von 1 gilt dann also

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_m} \frac{dQ_1}{T} = mc \int_{T_1}^{T_m} \frac{dT}{T} = mc \ln\left(\frac{T_m}{T_1}\right) < 0,$$

da  $T_m < T_1$ . Außerdem ist

$$\Delta S_2 = mc \ln\left(\frac{T_m}{T_2}\right) > 0,$$

da  $T_2 > T_m$ . Insgesamt ist die Entropieänderung des Systems

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln\left(\frac{T_m^2}{T_1 T_2}\right) \\ &= mc \ln\left(\underbrace{\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}}_{>1}\right) > 0 \quad \text{irreversibler Prozess!} \end{aligned}$$

- (B) Betrachte nun Abbildung 2.57. Ab dem Zeitpunkt  $t = 0$  strömt Gas aus dem Volumen  $V_1$  in das Volumen  $V_2$ , bis  $V_1$  und  $V_2$  gleichmäßig gefüllt sind ( $t > 0$ ). Diese Diffusion ist ein irreversibler Prozess. „Niemals“ wird es vorkommen, dass alle Gasmoleküle sich nochmal nach  $V_1$  zurückziehen (obgleich dies nicht unmöglich ist).

Wir berechnen die Entropie des Anfangs- und Endzustands. Den Unterschied  $\Delta S$  kennen wir schon aus dem Carnot-Prozess.

$$\Delta S = R \ln\left(\frac{V}{V_1}\right) > 0,$$

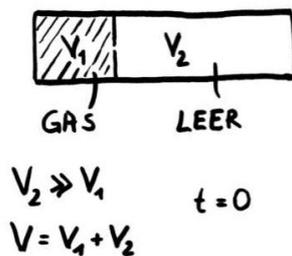


Abbildung 2.57: Irreversibler Prozess der Diffusion

da  $V \gg V_1$ . Hieraus gewinnen wir eine *statistische* Interpretation der Entropie:

- Vor dem Öffnen von  $V_1$  ist die Wahrscheinlichkeit  $W = 1$ , dass ein gewisses Teilchen in  $V_1$  ist.
- Nach dem Öffnen von  $V_1$  und Ausgleich gilt  $W_1 = \frac{V_1}{V_1+V_2}$ , dass sich ein bestimmtes Teilchen im Volumen  $V_1$  befindet.
- Für  $N$  Teilchen ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Teilchen in  $V_1$  sind

$$W_N = \left(\frac{V_1}{V}\right)^N \stackrel{(*)}{=} \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\frac{R}{k_B}}$$

(\*): für  $N = N_A = \frac{R}{k_B}$

Es folgt

$$k_B \ln(W_N) = R \ln\left(\frac{V_1}{V}\right) v = v - R \ln\left(\frac{V}{V_1}\right) = -\Delta S.$$

und

$$\Delta S = -k_B \ln\left(\frac{W_N}{W}\right) = k_B \ln\left(\frac{W}{W_N}\right) = k_B \ln\left(\frac{W_{\text{nachher}}}{W_{\text{vorher}}}\right),$$

(\*)

(\*):  $W = 1$  alle Teilchen irgendwo in  $V$ . Wir sehen also, dass  $\Delta S$  ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass ein System vom Zustand 1 (hier alle Teilchen in  $V_1$ ) in den Zustand 2 (alle Teilchen in  $V$ ) übergeht, ist.

Wir erhalten schließlich

$$\boxed{S = k \ln(W)}, \tag{2.7.1}$$

wobei  $W$  die Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten des Systems ist.

### 2.7.3 Dritter Hauptsatz

Die Entropie  $S$  ist eine Zustandsgröße. Wir gehen von Zustand  $i$  (für „initial“) zu Zustand  $f$  (für „final“) über. Damit ändert sich  $S$  von  $S_i$  nach  $S_f$ , es ist also die Änderung  $\Delta S = S_f - S_i$ . Mit  $dS = \frac{dQ}{T}$  ergibt sich

$$S_f = \int_{T_i}^{T_f} \frac{dQ}{T} + S_i. \tag{2.7.2}$$

N.B.: Falls der Prozess adiabatisch ist, ist  $dQ = 0$ , also  $S_f = S_i$ .

Für den Spezialfall  $T_i = 0$  haben wir

$$S(T) = \int_0^T \frac{dQ}{T} + S(0)$$

und man sieht den eigentlichen *dritten Hauptsatz der Thermodynamik*

$$\boxed{S(0) = 0}. \quad (2.7.3)$$

Man sieht: Messung von  $dQ(T)$  und  $T$  erlaubt die Bestimmung der absoluten Entropie  $S(T)$ . Dies ist ein Axiom und nicht tiefer begründbar.

## 2.8 Formale Aspekte der Thermodynamik

### 2.8.1 Beispiele zu Fragen der Thermodynamik

**Beispiel 1:** Eine Feder wird gespannt (cf. Abbildung 2.58). Die Auslenkung  $s$  (eine „extensive Größe“)

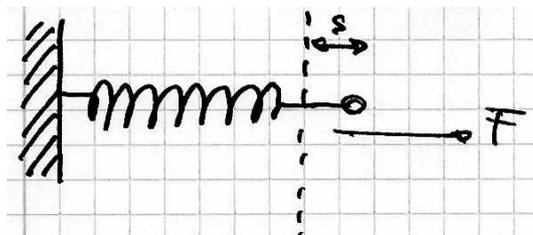


Abbildung 2.58: Eine Feder wird um  $s$  ausgelenkt und somit gespannt.

wird geändert. Hierbei wird Arbeit geleistet. Für die Leistung gilt

$$\vec{v} \cdot \vec{F} = \frac{ds}{dt} \vec{F} = \frac{dE}{dt}.$$

Die Zeit interessiert hierbei nicht.  $E$  ist die Gesamtenergie. Man sieht:

$$dE = F ds.$$

**Beispiel 2:** Eine Gasfeder wird komprimiert (cf. Abbildung 2.59). Sei  $F$  die Kraft,  $V$  das Volumen im Zylinder der Feder,  $A$  die (konstante) Fläche und  $p$  der Druck. Es gilt  $ds = \frac{dV}{A}$ . Es wird Leistung gegen einen Druck erbracht und es gilt

$$dE = -pdV.$$

Ist die Gasfeder thermisch an die Umgebung angekoppelt, so bleibt die Temperatur konstant (isothermer Prozess). Ist sie thermisch isoliert, so findet kein Wäremenaustausch mit der Umgebung statt und der Prozess heißt adiabatisch. Dann besteht ein Unterschied in der Arbeit (cf. Abbildung 2.60). Dieser Energieverlust ist mit den mechanischen Variablen  $pdV$  nicht beschrieben. Man braucht also neue Variablen, die zusätzliche Energiebeiträge  $\Delta Q$  berücksichtigen ( $\Delta Q$  verknüpft mit Entropie).

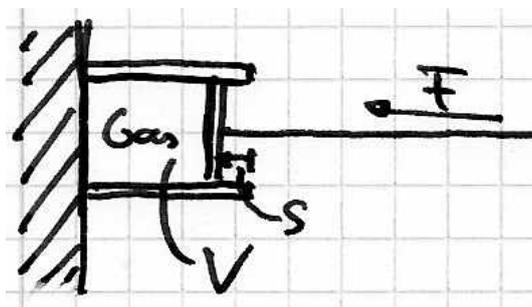


Abbildung 2.59: Gasfeder bestehend aus eine Zylinder, in den in Kolben gedrückt wird.

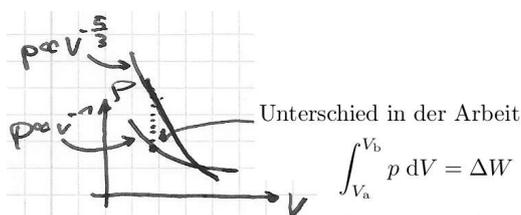


Abbildung 2.60: Isotherme und adiabatische Prozesse haben unterschiedliche Energiebilanzen.

Die Wärmeänderung  $\Delta Q$  wird nun mit einer neuen extensiven Größe  $S$  (Entropie) verknüpft:

$$dS \geq \frac{\Delta Q}{T}. \quad (2.8.1)$$

Gleichheit herrscht nur bei quasistationären Prozessen, ansonsten nimmt die Entropie irreversibel zu.

## 2.8.2 Gibbs'sche Fundamentalform

### 2.8.2.1 Makroskopische Variablen

Messgrößen:

- Energieflüsse in das oder aus dem System (messbar durch äußere Geräte).
- Makroskopische Mengengröße (sog. extensive Größen)  $(N, V, E, S, \dots)$ .

### 2.8.2.2 Was leistet Thermodynamik?

- Die Energieerhaltung wird wieder hergestellt.
- Gleichgewichtszustände (Glgz) werden charakterisiert.
- Reversible Prozesse zwischen Gleichgewichtsprozessen werden quantifiziert.
- Dissipation wird charakterisiert.

### 2.8.2.3 Postulate (Hauptsätze)

- (A) Isolierte Systeme verändern sich spontan, bis sie in einem Gleichgewichtszustand (zeitunabhängig, vorgeschichtsunabhängig) vorliegen.
- (B) Isolierte Systeme im Gleichgewichtszustand können mit wenigen makroskopischen Mengenvariablen beschrieben werden.

- (C) **1. Hauptsatz:** Energieerhaltung

$$dE = \Delta W + \Delta Q. \quad (2.8.2)$$

Dabei ist  $\Delta W$  der Arbeitsbeitrag, bestehend aus der mechanischen Arbeitsänderung  $-pdV$  und der chemischen Energieänderung  $\mu dN$  und  $\Delta Q$  der Wärmebeitrag. Zu  $\Delta W$  und  $\Delta Q$  gehören allerdings keine Stammfunktionen (es gibt kein  $Q$  und  $W$ , Wegintegrale  $\int_A^B \Delta Q$  sind wegababhängig).

- (D) **2. Hauptsatz:** Entropie und Dissipation.

Es gibt eine extensive Variable  $S(E, N, V, \dots, X)$ , die im isolierten System von den extensiven Größen abhängt und monoton mit  $E$  anwächst und  $dS \geq \frac{\Delta Q}{T}$  mit der Temperatur  $T$  erfüllt. Speziell bei einem adiabatischen Prozess ( $\Delta Q = 0$ ) gilt  $S_B - S_A \geq 0$  mit dem Ausgangspunkt A und dem Endpunkt B, sowie  $S_B = S_A$  nur bei reversiblen Prozessen. Irreversible Prozesse können bei adiabatischer Isolierung nur in eine Richtung laufen („Zeitpfeil“).

#### Bemerkung:

Das makroskopische System enthält  $10^{23}$  Freiheitsgrade und soll trotzdem durch wenige makroskopische Variablen beschrieben werden. Die Entropie  $S$  quantifiziert die Zahl der Mikrozustände. Bei einem irreversiblen Prozess genügen Makrovariablen nicht, da die mikroskopischen Freiheitsgrade Energie erhalten. Da wir diese nicht kontrollieren können, können wir den Prozess nicht umkehren.

### 2.8.3 Intensive Variablen

Aus der Betrachtung der Energieflüsse in ein oder aus einem System gewinnen wir ein Postulat, dass die Gibbs'sche Fundamentalform für die Energieänderung bei infinitesimalen reversiblen Prozessen

$$dE = \underbrace{TdS}_{\Delta Q\text{-reversibel}} - pdV + \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i dN_i + \dots + \underbrace{\xi}_{\text{Vorfaktor}} dX$$

lautet mit  $\nu$  als der Zahl der chemischen Komponenten,  $X$  ist eine weitere extensive Größe. Im Folgenden vereinfachen wir zu

$$dE = Tds - pdV + \mu dV. \quad (2.8.3)$$

Dies besagt, dass ein Gleichgewichtszustand durch  $E = E(S, V, N)$  beschrieben wird. Die Energie hängt von allen extensiven Größen ab ( $E$  ist die Stammfunktion von  $dE$ ).

„Intensive“ Variablen sind definiert durch partielle Ableitungen.

$$\frac{\partial E(S, V, N)}{\partial S} = T(S, V, N) \quad (2.8.4)$$

Die Temperatur ist auch eine Funktion von  $S$ ,  $V$  und  $N$ . Aus dem zweiten Hauptsatz folgt  $T > 0$ . Analog wird der Druck

$$\frac{\partial E(S, V, N)}{\partial V} = -p(S, V, N)$$

und das chemische Potential

$$\frac{\partial E(S, V, N)}{\partial N} = \mu(S, V, N)$$

definiert.

**Bemerkung:**

Es bleibt zu zeigen, dass  $T$ ,  $p$  und  $\mu$  den vertrauten Konzepten (wie beispielsweise dem Zusammenhang zwischen  $T$  und der thermischen Geschwindigkeit  $\frac{m}{2}\langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$  oder dass der Druck  $p$  durch Teilchenstöße mit der Wand entsteht) entsprechen.

## 2.8.4 Zustandsgleichungen

Funktionale Zusammenhänge  $T = T(S, V, N)$  heißen Zustandsgleichungen und beschreiben ein System. Sie legen die Energie bis auf eine Integrationskonstante fest:

$$E(S, V, N) = \int^S T(S', V, N) dS' + \underbrace{C(V, N)}_{\text{unbekannte Funktion}} .$$

**Beispiel:** Ideales Gas

$$\begin{aligned} p(S, V, N) &\propto V^{-\frac{5}{3}} \\ p(T, V, N) &= \frac{N}{V} k_B T \propto \frac{1}{V} \\ E(T, V, N) &= \frac{3}{2} N k_B T \end{aligned}$$

Notation:  $\frac{\partial E(S, V, N)}{\partial V} = \frac{\partial E}{\partial V} \Big|_{S, N} \neq \frac{\partial E}{\partial V} \Big|_{T, N}$ .

**Bemerkung:**

Damit folgt zum Beispiel  $E = \frac{3}{2} pV = E(T, V, N)$ ,  $p \neq -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{3}{2} p$ , da  $1 = -\frac{3}{2}$  folgen würde, wobei in Wirklichkeit  $\frac{\partial E(T, V, N)}{\partial V} = 0$  für ein ideales Gas, da  $\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{3}{2} N k_B T \right) = 0$

## 2.8.5 Thermodynamisches Potential und Legendre-Transformationen

### 2.8.5.1 Wärmebad

Wir betrachten ein isoliertes System, welches aus zwei Subsystemen besteht, die extensive Größen austauschen können. Die intensiven Variablen beider Systeme sind also gleich (Beweis in Abschnitt 2.8.8).

**Beispiele:**

- Subsystem 1 und 2 tauschen Energie aus  $\Rightarrow T_1 = T_2 = T$ . Die Temperaturen sind gleich im „thermodynamischen“ Gleichgewicht.
- 1 und 2 tauschen Volumen aus  $\Rightarrow p_1 = p_2$ .

### 2.8.5.2 Legendre-Transformation

Die Legendre-Transformation erlaubt konjugierte Variablen auszutauschen

Innere Energie	Legendre-Transformation	Freie Energie
$E = E(S, V, N)$	$F = E - TS$	$F = F(T, V, N)$
GFF: $dE = TdS - pdV + \mu dV$ , also $T = \frac{\partial E(S, V, N)}{\partial S}$		GFF: $dF = -SdT - pdV + \mu dV$ , $S = -\frac{\partial F(T, V, N)}{\partial T}$

#### Bemerkung:

- Bei  $F(T, V, N) = E(\overset{\downarrow}{S}, V, N) - T(\overset{\downarrow}{S}, V, N) \overset{\downarrow}{S}$  muss  $T(S, V, N) = \frac{\partial E(S, V, N)}{\partial S}$  nach  $S(T, V, N)$  auflösbar sein und eingesetzt werden.
- Bei Umkehrung  $E(S, V, N) = F + \overset{\downarrow}{T} S(\overset{\downarrow}{T}, V, N)$  muss entsprechend  $S = -\frac{\partial F(T, V, N)}{\partial T}$  nach  $T(S, V, N)$  auflösbar sein und eingesetzt werden.

#### Beweis:

$$dF = d(E - TS) = dE - SdT - TdS = \text{Beh.}$$

Aus der Gibbs'schen Fundamentalfom von  $F$  kann man folgern:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial V} (E(S, V, N) - T(S, V, N)) \right|_{S(T, V, N)} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial V} (E(S(T, V, N), V, N) - TS(T, V, N)) \right|_{S(T, V, N)} \\ &= \underbrace{\frac{\partial E(S, V, N)}{\partial S}}_{\text{Def. von } T} \frac{\partial S(T, V, N)}{\partial V} + \left. \frac{\partial E(S, V, N)}{\partial V} \right|_{S(T, V, N)} - T \frac{\partial S(T, V, N)}{\partial V} \\ &= \underbrace{(T - T)}_{=0} \frac{\partial S(T, V, N)}{\partial V} + \left. \frac{\partial E(S, V, N)}{\partial V} \right|_{S(T, V, N)} \\ &= -p(S(T, V, N), V, N) = -p(T, V, N). \end{aligned}$$

### 2.8.5.3 Thermodynamische Gibbs'sche Potentiale

(1) Energie	$E(S, V, N)$	$dE = TdS - pdV + \mu dV$
(2) Helmholtz freie Energie	$F(T, V, N) = E - TS$	$dF = -SdT + pdV + \mu dV$
(3) Enthalpie	$H(S, p, N) = E + pV$	$dH = TdS + Vdp + \mu dV$
(4) Freie Enthalpie	$G(T, p, N) = E - TS + pV$	$dG = -SdT + Vdp + \mu dV$
(5) Großkanonisches Potential	$\Omega(T, V, \mu) = E - TS - \mu N$	$d\Omega = -SdT - pdV - Nd\mu$

#### Bemerkung:

Das großkanonische Potential  $\Omega$  beschreibt Systeme, die mit der Umgebung Energie und Teilchen austauschen können.

**Bemerkung:**

Die Maxwell-Relationen gelten, da die zweiten Ableitungen vertauschen:  $\frac{\partial^2 G(T,P,N)}{\partial T \partial p} = \frac{\partial V(T,p,N)}{\partial T} = -\frac{\partial S(T,p,N)}{\partial p}$ .

**2.8.6 Beispiel: Ideales Gas****2.8.6.1 Sackur-Tetrode-Formel für  $E(S, V, N)$** 

Die Zustandsgleichung des idealen Gases lautet

$$p(E, V, N) = \frac{2 E}{3 V}. \quad (2.8.5)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(E, V, N)}{\partial V} &= \frac{p(E, V, N)}{T(E, V, N)} = p(E, V, N) \frac{\partial S(E, V, N)}{\partial E} \\ \Rightarrow \frac{3}{2} V \frac{\partial S(E, V, N)}{\partial V} &\stackrel{(2.8.5)}{=} E \frac{\partial S(E, V, N)}{\partial E} \\ \Rightarrow S(E, V, N) &= \Sigma(V^{2/3} E), \end{aligned}$$

weil  $\frac{\partial S(E, V, N)}{\partial V} = \Sigma' \frac{EV^{2/3}}{V} \frac{2}{3}$  (mit  $\Sigma' = \frac{d\Sigma(x)}{dx}$ ) und analog  $\frac{\partial S}{\partial E}|_{V, N}$ . Ferner gilt

$$\frac{\partial S(E, V, N)}{\partial E} = \Sigma' V^{2/3} = \frac{1}{T(E, V, N)} \stackrel{*}{=} \frac{3 N k_B}{2 E}.$$

Bei der Gleichheit \* benutzen wir, dass beim idealen Gas gilt  $E = \frac{3}{2} N k_B T$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \Sigma'(x) &= \frac{3 N k_B}{2 x}, \quad \text{wobei } x = V^{2/3} E \\ \Rightarrow S(E, V, N) &= \frac{3}{2} N k_B \ln \left( \frac{E V^{2/3}}{c} \right). \end{aligned}$$

Dabei ist  $c$  eine Integrationskonstante mit  $c = \tilde{c} N^{5/3}$ , also  $c = c(N)$  ( $c$  hängt von  $N$  ab). Schließlich haben wir

$$E(S, V, N) = c' \frac{N}{\left(\frac{V}{N}\right)^{(2/3)}} \exp \left( \frac{2}{3} \frac{S}{N k_B} \right). \quad (2.8.6)$$

**Bemerkung:**

In der statistischen Mechanik ergibt sich  $c' = \frac{3h^2}{4\pi m} e^{-5/3}$  für spinlose Fermionen.

**2.8.6.2 Chemisches Potential**

Für das chemische Potential  $\mu$  gilt

$$\begin{aligned} \mu(S, V, N) &= \frac{\partial E(S, V, N)}{\partial N} = \frac{5 E}{3 N} - \frac{3}{2} \frac{S E}{k_B N^2} \\ \Rightarrow \mu &= \frac{3 E}{2 N} \left( \frac{5}{2} - \frac{S}{k_B N} \right). \end{aligned}$$

Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir

$$S(E, V, N) = \frac{3}{2} N k_B \ln \left( \frac{E}{N} \underbrace{\left( \frac{V}{N} \right)^{2/3}}_{\propto \left( \frac{T}{p} \right)^{2/3}} c' \right).$$

Mit der thermischen Zustandsgleichung  $pV = Nk_B T$  und der kalorischen Zustandsgleichung  $\frac{2}{3} \frac{E}{N} = k_B T$  des idealen Gases folgt

$$\mu = k_B T \left( \ln(p) - \frac{5}{3} \ln(T) + c'' \right), \quad (2.8.7)$$

**Bemerkung:**

- $\mu$  hängt nur von  $p$  und  $T$  ab.
- $\mu$  ist die reversible Änderung der inneren Energie bei Addition von Teilchen, wenn  $S$  und  $V$  konstant bleiben. Für  $p \rightarrow 0$  werden Gase ideal, d.h.  $\mu(p \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$  (ist ein sinnvolles physikalisches Ergebnis). Dies erklärt, warum Gase sich ins Vakuum ausbreiten.

## 2.8.7 Thermisches Gleichgewicht und thermodynamische Extremalprinzipien

### 2.8.7.1 Maximumsprinzip der Entropie

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nimmt die Entropie bei irreversiblen Prozessen zu. Dies führt zur Definition eines Gleichgewichtszustandes als Zustand mit maximaler Entropie (Axiom).

**Definition:** Innere Beschränkung

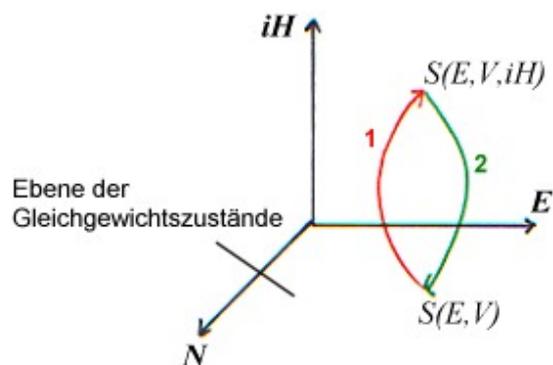
Eine innere Beschränkung verhindert den internen Ausgleich von Anteilen einer global erhaltenen Messgröße zwischen zwei Subsystemen.

Betrachten wir nun ein Gedankenexperiment. Prozess 1 sei reversibel, die innere Beschränkung wird durch Zufluss von Arbeit und Abfuhr von Wärme aufgebaut. Prozess 2 ist eine freie „Relaxation“ (Ausgleichsbewegung) des Systems zurück ins Gleichgewicht bei adiabatischer Isolierung, nachdem die innere Beschränkung entfernt wurde (Bsp.: Wand weg, Loch in Membran). Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik folgt, dass die Entropie bei Prozess 2 zunimmt, d.h.

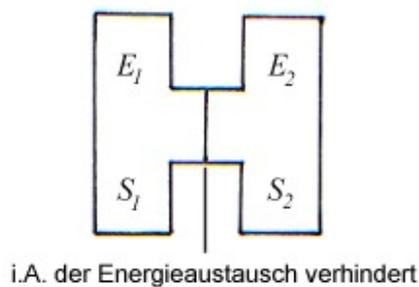
$$S(E, x) > S(E, x, \text{innere Beschränkung}).$$

**Axiom:**

Der Gleichgewichtszustand hat die maximale Entropie aller Vergleichszustände bei selben Makrovariablen und inneren Beschränkungen.



**Abbildung 2.61:** Die  $x$ - $E$ -Ebene ist die Ebene der Gleichgewichtszustände. Wir betrachten die Prozesse 1 und 2.



**Abbildung 2.62:** Das Gesamtsystem ist isoliert und mit einer inneren Beschränkung versehen, welche Energieaustausch verhindert.

### 2.8.8 Thermodynamisches Gleichgewicht und Temperatur

Die innere Beschränkung liefert feste Werte  $E_1$  und  $E_2$  mit  $E_1 + E_2 = E_{\text{ges}}$ . Seien  $\delta S_i$  und  $\delta E_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) die Abweichungen von den Werten im Gleichgewichtszustand.

Bei Prozess 2 gilt

$$\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 \stackrel{\text{Taylor}}{\cong} \frac{\partial S_1}{\partial E_1} \delta E_1 + \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \delta E_2 + \dots$$

Weil  $E = \text{konst.}$  gilt  $\delta E_1 = -\delta E_2$  und die Gibbs'sche Fundamentalform  $\frac{\partial S_i(E, x)}{\partial E} = \frac{1}{T_i}$  ( $i \in \{1, 2\}$ ,  $T_i$  die Temperatur im Subsystem  $i$ ). Es folgt

$$\delta S = \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \delta E_1 + \dots \stackrel{!}{\geq} 0.$$

Weil  $S$  maximal im Gleichgewicht ist und  $\delta E_1 \leq 0$  fluktuiert, folgt  $T_1 = T_2$  im Gleichgewichtszustand.

#### Bemerkung:

- Im thermischen Gleichgewicht ist  $T$  überall gleich.
- Damit ist gezeigt:  $\frac{\partial E(S, V; N)}{\partial S}$  ist das, was ein Thermometer misst.

#### Bemerkung:

- Analog bei Volumenaustausch:  $p_1 = p_2 = p$ ,  $\left( \frac{\partial S(E, V, N)}{\partial V} = -\frac{p}{T} \right)$ , analog bei Teilchenaustausch:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ .
- In welche Richtung fließt die Energie, wenn vor dem Ausgleichsprozess  $T_1 \neq T_2$  galt? Für  $T_1 > T_2$  folgt daraus  $\delta E_1 < 0$ , d.h.  $E_1$  nimmt ab bei Prozess 2. Umgekehrt folgt für  $T_2 > T_1$ , dass  $\delta E_1 > 0$  und  $E_1$  nimmt zu bei Prozess 2. Energie fließt immer vom Wärmeren zum Kälteren.

Daraus folgt  $C_x = \frac{\partial E(T, V, N)}{\partial T} > 0$  durch Weiterführung der Taylorentwicklung.

$$\delta S = \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \delta E_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial E_1} \frac{1}{T_1(E_1, x)} - \frac{\partial}{\partial E_2} \frac{1}{T_2(E_2, x)} \right) \delta E_2^2 + \dots$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial E} \frac{1}{T(E, x)} = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T(E, x)}{\partial E} = -1 \frac{1}{T^2} \frac{1}{\frac{\partial E(T, x)}{\partial T}} = -\frac{1}{T^2} C_x$$

mit spezifischer Wärme  $C_x$ . Die spezifische Wärme muss positiv sein, weil nur so die Energieflüsse die Temperatur angleichen.



# Kapitel 3

## Spezielle Relativitätstheorie

### 3.1 Mathematischer Einschub: Geometrische Konzepte

#### 3.1.1 Kartesische Koordinaten

Jeder Punkt im Raum besitzt Raumkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

also  $x^i$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Jeder Punkt in der Raumzeit besitzt Raum-Zeit-Koordinaten mit  $x^0 = ct$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{r} \end{pmatrix},$$

also  $x^\mu$  mit  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

#### 3.1.2 Minkowski-Raum (MR), Minkowski-Metrik und Einstein'sche Inertialsysteme

Alle Punkte („Ereignisse“) in der Raumzeit  $\vec{x}$  (d.h.  $x^\mu \in \mathbb{R}$  für  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ ) konstruieren einen Minkowski-Raum, d.h. einen Vektorraum mit Metrik, so dass ein Längenelement lautet

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

wobei  $g_{\mu\nu}$  der metrische Tensor ist. (Achtung: Hier wird schon die Einstein'sche Summenkonvention (3.2.1) verwendet!) Ein Minkowski-Raum mit Koordinatensystem, so dass

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

lautet, heißt (Einstein'sches) Inertialsystem. Dann gilt

$$\begin{aligned} dl^2 &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= (dx^0)^2 - (d\vec{r})^2. \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

- Vergleich mit „euklidischem“ Vektorraum  $\mathbb{R}^3$ , wo  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  gilt, also

$${}^{(e)}g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lautet.

- Krummlinige Koordinaten sind komplizierter, wir wollen sie hier nicht behandeln.
- $g_{\mu\nu}$  definiert ein „Skalarprodukt“

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

zweier kontravarianter Vektoren. Mit einem kovarianten Vektor  $a_\mu := g_{\mu\nu} a^\nu = (a^0, -\vec{a})$  kann dies als

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_\mu b^\mu$$

geschrieben werden.

- Die Inverse zu  $g_{\mu\nu}$  ist  $g^{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \delta_\mu^\kappa = \begin{cases} 1, & \mu = \kappa \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und lautet

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 3.1.3 Ausgezeichnete Koordinatentransformationen

Eine Koordinatentransformation heißt ausgezeichnet, wenn sie ein Inertialsystem  $IS$  in ein anderes Inertialsystem  $IS'$  überführt, d.h. wenn

$$\boxed{g'_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = L^\kappa_\mu g_{\kappa\lambda} L^\lambda_\nu} \quad (3.1.1)$$

gilt; in Matrixnotation:  $\boxed{g = L^T g L}$ .

**Bemerkung:**

- Die ausgezeichneten Koordinatentransformationen sind die Lorentz-Transformationen.  
Beweis: Nur am Beispiel der Lorentz-Transformationen in Abschnitt 3.3.3.

- (3.1.1) gibt eine allgemeine Charakterisierung der Lorentz-Transformationen.
- Ausgezeichnete Koordinatentransformationen im Euklidischen sind Rotationen  $\underline{R}^T \underline{R} = \underline{1}$  (cf. Abbildung 3.1). Die Transformationsregel der Metrik folgt aus der Forderung, dass jedes Längenelement invariant bleibt,

$$\begin{aligned} dl'^2 &= g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} \\ &= g'_{\mu\nu} L^{\mu}_{\kappa} L^{\nu}_{\lambda} dx^{\kappa} dx^{\lambda} \\ &\stackrel{!}{=} g_{\kappa\lambda} dx^{\kappa} dx^{\lambda}. \end{aligned}$$

hieraus folgt (3.1.1).

**Bemerkung:**

Es folgt auch  $x'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} = L^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}$ , also  $L^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ .

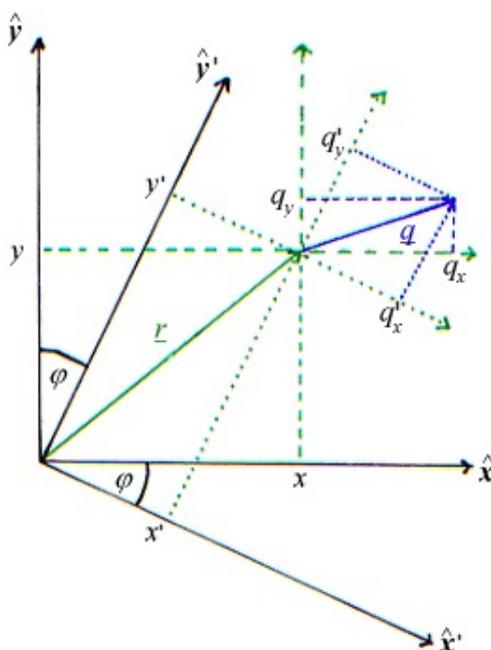


Abbildung 3.1: Koordinatentransformation (Rotation) von  $KS$  nach  $KS'$ .

### 3.1.4 Tensoren

Tensoren sind Verallgemeinerungen des Konzepts Vektor. Sei  $D^{\mu}_{\nu}$  die  $d$ -dimensionale Matrix einer ausgezeichneten Koordinatentransformation (d.h.  $D^{\mu}_{\nu} \hat{=} \mathbb{R}^{\mu}_{\nu}$  bei  $d = 3$  (Rotation im Euklidischen) oder  $D^{\mu}_{\nu} \hat{=} L^{\mu}_{\nu}$  für  $d = 4$  (Lorentz-Transformation im Minkowski-Raum)). Damit definiert man einen (kontravarianten)

Tensor  $N$ -ter Stufe durch  $d^N$  Zahlen. In Koordinatendarstellung ist dies

$$t^{\mu(1)\mu(2)\dots\mu(N)} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ Minkowski - Raum} \\ \mu = i \in \{1, 2, 3\} \text{ Euklidisch} \end{array}$$

wenn er unter ausgezeichneten Koordinatentransformationen transformiert gemäß

$$t^{\mu(1)\mu(2)\dots\mu(N)} = \bar{d}(D) D_{\nu(1)}^{\mu(1)} D_{\nu(2)}^{\mu(2)} \dots D_{\nu(N)}^{\mu(N)} t^{\nu(1)\dots\nu(N)},$$

wobei

$$\bar{d}(D) = \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{Tensor} \\ \det(D) & \rightarrow \text{Pseudotensor } (\det(D) = \pm 1) \\ L_0^0 \leq 0 & \rightarrow \text{zeitartiger Tensor/Pseudotensor} \end{cases}$$

**Bemerkung:**

- $\bar{d}(D) = \det(D)$  spielt eine Rolle bei der Spiegelung, wo  $\det(D) = -1$ .
- Die 0. Stufe heißt Skalar, die 1. Stufe heißt Vektor, die 2. Stufe heißt Matrix.

**Beispiele:** (A) im Euklidischen  $\mathbb{R}^3$

- Länge eines Vektors  $|\vec{F}|$  ist skalar.  $\rightarrow$  Tensor 0. Stufe
- Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}, t)$  (Skalarfeld) oder Druck  $p$ .  $\rightarrow$  Tensorfelder 0. Stufe
- $\vec{j}(\vec{r}, t), \vec{E}(\vec{r}, t), \nabla = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ; Vektoren  $\rightarrow$  Tensor 1. Stufe
- $\vec{B}(\vec{r}, t)$  ist ein Pseudovektorfeld (d.h. unter Spiegelung  $\vec{r}' = -\vec{r}$  gilt  $\vec{B}'(\vec{r}', t) = \vec{B}(-\vec{r}, t)$  und nicht wie bei einem Vektorfeld, wo  $\vec{j}'(\vec{r}', t) = -\vec{j}(-\vec{r}, t)$ , was aber Sinn ergibt, da die Maxwell-Gleichung im gestrichenen Koordinatensystem  $KS'$ , genauso wie in  $KS$

$$\begin{aligned} \nabla' \times \vec{B}' &= -\nabla \times \vec{B}(-\vec{r}, t) \\ &= n \vec{j}'(\vec{r}', t) = -\vec{j}(-\vec{r}, t) \end{aligned}$$

lautet.)

- Das Kronecker Delta  $\delta_{ij}$  ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe ( $\hat{=}\underline{1}$ ).
- Das Levi-Civita-Symbol ist ein Pseudotensor 3. Stufe

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk = xyz \text{ oder } ijk = yzx \text{ oder } ijk = zxy \\ -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit lautet das Vektorprodukt  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$  so:  $a_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k$ .

- Ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe

$$M_{ij} = -M_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & -m^3 & m^2 \\ m^3 & 0 & -m^1 \\ -m^2 & m^1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eindeutig verknüpft mit einem Pseudovektor  $\vec{m}$  und damit

$$M_{ij} a^j = (\vec{m} \times \vec{a})^i.$$

(B) im Minkowski-Raum

- $g^{\mu\nu} \rightarrow$  symmetrischer Tensor 2. Stufe
- $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_\mu \cdot b^\mu = \langle \vec{a}', \vec{b}' \rangle$  ist ein Lorentz-Skalar.
- $t_\mu^\nu = g_{\mu\kappa} t^{\kappa\nu}$  ist ein Gemisch  $\rightarrow$  kontra- und kovarianter Tensor 2. Stufe.

(C) Verjüngung

Ein Tensor  $N$ -ter Stufe ergibt nach Absummieren zweier Indizes einen Tensor  $(N - 2)$ -ter Stufe.

$$\begin{aligned} S^{\mu(1)\dots\mu(N-2)} &= g_{\nu\kappa} t^{\mu(1)\dots\mu(N-2)\nu\kappa} \\ &= t_\nu^{\mu(1)\dots\mu(N-2)\nu}. \end{aligned}$$

Verjüngung eines Tensors 2. Stufe ist ein Skalar und heißt Spur. Im Minkowski-Raum:

$$\text{Sp}(t) = g_{\mu\nu} t^{\mu\nu} = t^\mu_\mu = t^{00} - t^{11} - t^{22} - t^{33}.$$

Im  $\mathbb{R}^3$  (euklidisch):

$$\text{Sp}(t) = t^{ii} = t^{11} + t^{22} + t^{33}$$

(Summe der Diagonalterme). Bsp.:  $\text{Sp}(g) = 4 = \text{Sp}(\underline{1})$ . Ein Massepunkt bewegt sich also mit der trägen Masse  $m(v)$ , wenn er die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  relativ zum Labor hat.

Bemerkung:

Aus  $p_\mu p^\mu = \text{konst.}$  folgt  $p_\mu \frac{d}{d\tau} p^\mu = 0$ .

## 3.2 Newton'sche Mechanik

### 3.2.1 Galilei-Invarianz

Aus der Newton'schen Mechanik geht hervor, dass mechanische Vorgänge in allen Inertialsystemen (IS) gleich ablaufen. Zwei solche Inertialsysteme sind durch eine Galilei-Transformation verknüpft:

$$x^i = \sum_{j=1}^3 R^i_j x'^j + r_0^i + v^i t$$

mit konstanten  $R^i_j, \vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0$ , wobei  $R^i_k$  Einträge einer Rotationsmatrix sind, die

$$\sum_{j=1}^3 R^i_j R^j_k = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ergeben. In Matrix-Notation ist das  $\underline{R} \cdot \underline{R}^T = \underline{1}$ .

**Bemerkung:**

Indizes für die Koordinaten sind oben ( $x^i$ ) („kontravarianter Vektor“). Sie werden mit den unteren Indizes an der Matrix  $R^i_j$  absummiert. Man führt eine Abkürzung ein: die Einstein'sche Summenkonvention

$$\sum_{j=1}^3 R^i_j x^j \doteq R^i_j x^j. \quad (3.2.1)$$

Doppelt (oben und unten) auftretende Indizes werden absummiert.

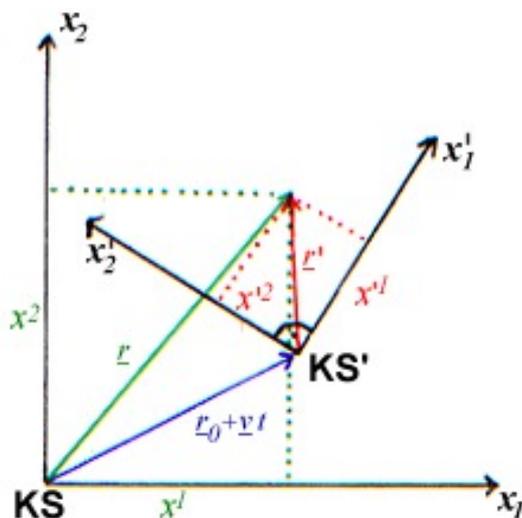


Abbildung 3.2: Transformation zweier Koordinatensysteme.

### 3.2.2 Widerspruch zwischen Wellengleichung und Maxwell-Theorie und Galilei-Invarianz

#### 3.2.2.1 Wellengleichung

Die Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

hat die spezielle Lösung

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

mit  $\omega = ck$ . Führe nun eine Galilei-Transformation auf ein Koordinatensystem durch, welches sich mit der Wellenfront, also mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \frac{c}{k} \vec{k}$  mitbewegt. Man erhält in diesem Koordinatensystem eine stehende Welle

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}', t) &= \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}' - \frac{k^2}{k} ct\right) \\ &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}'), \end{aligned}$$

was aber keine Lösung der Wellengleichung ist.

**Bemerkung:**

Dieser Widerspruch ist Ausgangspunkt der Einstein'schen speziellen Relativitätstheorie.

#### 3.2.2.2 Michelson - Morley - Versuch

Da sich die Erde bewegt sollte es möglich sein unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten zu messen. Diese Idee haben die beiden Herren zum Widerspruch geführt. Dafür verwendeten sie ein Michelson-Interferometer

(cf. Abschnitt 1.8.2). Beim Rotieren der Anordnung müsste sich die Beobachtung ändern, da die Bewegungsrichtung der Erde einmal entlang Weg  $l_1$  und einmal entlang von Weg  $l_2$  verläuft (cf. Abbildung 3.3). Beim Drehen sollte sich die Zahl der Interferenzmaxima ändern um

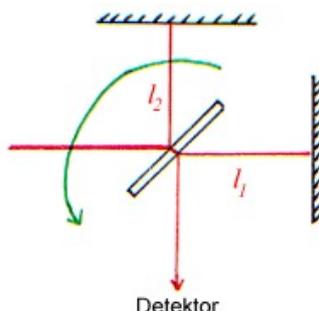


Abbildung 3.3: Michelson-Interferometer mit Wegen  $l_1$  und  $l_2$ .

$$N \propto \frac{l_1 - l_2}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2,$$

,wobei  $v$  die Geschwindigkeit der Erde zum Äther ist.

Beobachtung: Keine Änderung von  $N$ . Dies ist dadurch erklärbar, dass die Lichtgeschwindigkeit  $c$  in allen Inertialsystemen konstant ist.

### 3.3 Relativitätsprinzip und Lorentztransformation

#### 3.3.1 Einstein'sche Relativitätsprinzip

Das Einstein'sche Relativitätsprinzip besagt, dass alle physikalischen Vorgänge in Inertialsystemen gleich ablaufen und dass zwei Inertialsysteme durch eine Lorentztransformation (LT) verknüpft sind.

#### 3.3.2 Lichtgeschwindigkeit $c$

Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum ist unabhängig vom Inertialsystem, d.h. sie ändert sich nicht bei Lorentztransformationen.

#### 3.3.3 Die speziellen Lorentztransformationen

Es sei die Wellenfront einer vom Ursprung ausgehenden Licht-Kugelwelle betrachtet in zwei Koordinatensystemen, die bei  $t = 0$  zusammenfallen und relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v} = v\hat{z}$  bewegt seien.

Da  $c = \text{konst.}$ , lautet die Position der Wellenfront

$$r^2 - c^2t^2 = \vec{r}^2 - (x^0)^2 = \vec{r}'^2 - (x^{0'})^2 = \vec{r}''^2 - c^2t'^2. \quad (3.3.1)$$

Macht man die vernünftige Annahme  $x^1 = x^{1'}$ ,  $x^2 = x^{2'}$ , so sind nur  $x^3$ ,  $x^0$  und  $x^{0'}$  zu betrachten. Betrachte die Transformationsmatrix der Lorentz-Transformation. Sei

$$x^{\mu'} = L_{\nu}^{\mu}(\vec{v})x^{\nu}.$$

Das Koordinatensystem bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  relativ zu  $KS'$  (Lorentz-Transformation von  $KS$  nach  $KS'$ ).

**Bemerkung:**

Hierbei haben wir postuliert:

- (A) Die Lorentz-Transformation ist eine lineare Abbildung.
- (B) Die Lorentz-Transformation ist eine homogene Abbildung, d.h. 0 wird auf 0 abgebildet.
- (C)  $L$  hängt nur von  $\vec{v}$  und Naturkonstanten ( $c$ ) ab.

Im Folgenden nehmen wir an:

- Isotropie des Raums
- Die Lorentz-Transformationen bilden eine Gruppe (insbesondere ergeben dann zwei Lorentz-Transformationen hintereinandergeschaltet wieder eine Lorentz-Transformation).
- Für  $v \ll c$  wird die Lorentz-Transformation zur Galilei-Transformation.

Nun geht es darum  $L$  zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ f(v) & d(v) \end{pmatrix}}_{L_{\nu}^{\mu}(\vec{v})} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Es ist also  $L_0^0 = a(v)$  etc.. Bei Raumspiegelung  $z \rightarrow -z$  und  $z' \rightarrow -z'$  und somit auch  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$  gibt  $L_{\nu}^{\mu}(-\vec{v})$  die Lorentz-Transformation, also

$$\begin{pmatrix} ct' \\ -z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a(-v) & b(-v) \\ f(-v) & d(-v) \end{pmatrix}}_{L_{\nu}^{\mu}(-\vec{v})} \begin{pmatrix} ct \\ -z \end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Dies multiplizieren wir mit -1 durch und erhalten

$$\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(-v) & -b(-v) \\ -f(-v) & d(-v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.3.4)$$

Dies vergleichen wir mit (3.3.2). Es folgt, dass  $a(v)$  und  $d(v)$  symmetrische Funktionen von  $v$ , sowie dass  $b(v)$  und  $f(v)$  antisymmetrische Funktionen von  $v$  sind.

$L_{\nu}^{\mu}$  ergibt auch die zu (3.3.2) inverse Lorentz-Transformation (von  $KS'$  zu  $KS$ , wobei  $KS$  ruht und sich  $KS'$  mit  $\vec{v}$  bewegt). Die Inverse zu (3.3.2) lautet aber auch

$$\begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{ad - bf}_{\text{auch das ist } L_{\nu}^{\mu}(-\vec{v})}} \begin{pmatrix} d(v) & -b(v) \\ -f(v) & a(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$

Ein Vergleich mit (3.3.3) liefert

$$\begin{aligned} ad - bf &= \det(L) = \pm 1 (= 1) \\ a &= d = a(v^2). \end{aligned}$$

Damit in (3.3.1):

$$\begin{aligned} z^2 - c^2t^2 &= (fct + az)^2 - (act + bz)^2 \\ &= (a^2 - b^2)z^2 - (a^2 - f^2)c^2t^2 + 2a(f - b)ctz \\ \Rightarrow f &= b = v\bar{b}(v^2) \\ \Rightarrow a^2 - b^2 &= a^2 - f^2 = \det(L) = 1. \end{aligned}$$

Man kann also einen Winkel  $\varphi$  einführen, mit dem  $a = d = \cosh(\varphi)$ ,  $b = f = \sinh(\varphi)$  und

$$L_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) \\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) \end{pmatrix},$$

weil  $\cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi) = 1$ . Mit  $\beta = \tanh(\varphi)$  und  $\gamma = \cosh(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  folgt

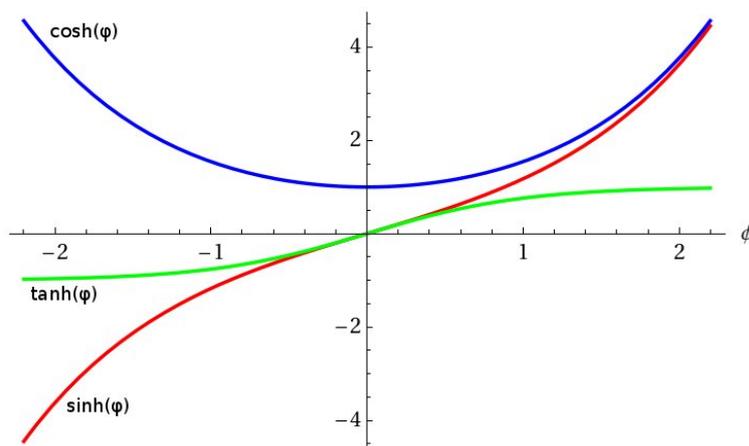


Abbildung 3.4:  $\sinh(\varphi)$  (rot),  $\cosh(\varphi)$  (blau) und  $\tanh(\varphi)$  (grün).

$$L_{\nu}^{\mu} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$ . Aus Vergleich mit der Galilei-Transformation für  $v \rightarrow 0$ , wo  $\beta \rightarrow \propto v$  und  $\gamma = 1 + \mathcal{O}((\frac{v}{c})^2)$ , folgt  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Aus Hintereinanderschaltung von zwei Lorentz-Transformationen folgt  $\beta \equiv \frac{v}{c}$ , damit sich wieder eine Lorentz-Transformation ergibt.

**Fazit:**

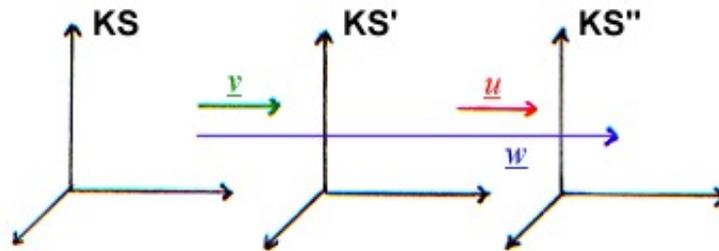
Diese Lorentz-Transformation heißt spezielle Lorentz-Transformation (sLT) („Lorentz-Boost“) lautet

$$L = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$t' = \frac{t + \frac{v}{c^2}z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad z' = \frac{z + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.3.6)$$

**3.3.4 Elementare Forderungen****3.3.4.1 Addition von kollinearen Geschwindigkeiten**

Betrachte Abbildung 3.5. Die Geschwindigkeiten  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  sind kollinear, falls  $\vec{u} \parallel \vec{v} \parallel \vec{w}$ . Nach Galilei



**Abbildung 3.5:** Das Koordinatensystem  $KS''$  bewegt sich mit  $u$  relativ zu  $KS'$ , welches sich relativ zu  $KS$  mit  $v$  bewegt.

gilt  $w = u + v$ .

Wir wollen aber durch zwei spezielle Lorentz-Transformationen von  $KS$  nach  $KS''$  gelangen:

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{\mu}(u)L_{\kappa}^{\nu}(v) &= L_{\kappa}^{\mu}(w) \\ \Rightarrow L_{\kappa}^{\mu}(w) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 + \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2v^2}{c^4}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\frac{v}{c} + \frac{u}{c}}{1 + \frac{uv}{c^2}} \\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zum Vergleich:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v+u}{c}\right)^2}} = \left( \frac{1 + \frac{u^2v^2}{c^4} + \frac{2uv}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} - 2\frac{uv}{c^2}}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

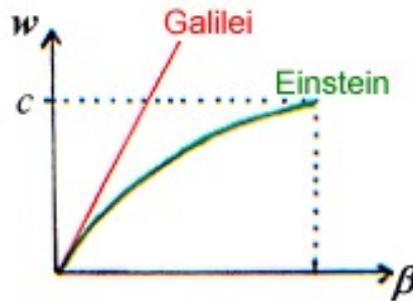
Es bewegt sich also  $KS''$  relativ zu  $KS$  mit der additierten Geschwindigkeit

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

Die spezielle Lorentz-Transformation von  $KS$  nach  $KS''$  verwendet dieses  $w$ .

**Bemerkung:**

- Wäre  $\beta$  eine nichtlineare Funktion von  $\frac{v}{c}$ , so könnte kein  $w$  definiert werden, so dass  $L(u)L(v) = L(w)$  (alles spezielle Lorentz-Transformationen). (Dies wurde schon in Abschnitt 3.3.3 verwendet.)
- Sei  $u = v \Rightarrow w = \frac{2v}{1+v^2/c^2}$ . Während beim Ansatz nach Galilei die Geschwindigkeit beliebig groß werden könnte, so ist bei relativistischem Ansatz die maximale Geschwindigkeit  $c$  (cf. Abbildung 3.6).



**Abbildung 3.6:** Verhalten der addierten Geschwindigkeit nach Galilei (rot) und nach Einstein (grün).

### 3.3.4.2 Raum-Zeit-Diagramme

Zwei Punkte  $\vec{x}_{(1)}$  und  $\vec{x}_{(2)}$  („Ereignisse“) haben den Abstand  $x^\mu = x_{(2)}^\mu - x_{(1)}^\mu$ . O.B.d.A. sei  $x^1 = 0 = x^2$ ;  $x^0 \neq 0 \neq x^3$ . So ist  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle := (x^0)^2 - \vec{r}^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta z^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta z')^2$  (wie in Abschnitt 3.3.3 berechnet) die „Länge“ des Abstands also invariant unter einer speziellen Lorentz-Transformation:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma \left( \Delta t + \beta \frac{\Delta z}{c} \right), \\ \Delta z' &= \gamma (\Delta z + \beta c \Delta t).\end{aligned}$$

Abbildung 3.7 zeigt ein Raum-Zeit-Diagramm. 1. Fall:  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ . Dann heißt  $\vec{x}$  zeitartig und liegt im Zukunftskegel oder im Vergangenheitskegel (cf. Abbildung 3.7).

Es gibt ein Inertialsystem  $IS$ , in dem beide Ereignisse am selben Ort  $\Delta z = 0$ , aber mit Zeitdifferenz  $\Delta t$  stattfinden. In allen anderen Inertialsystemen  $IS'$  ist die Zeitdifferenz der beiden Ereignisse größer:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} > \Delta t$$

(„Zeitdilatation“).

2. Fall:  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$  heißt Lichtkegel (alle Punkte die ein Photon durchfliegt, das im Ursprung gestartet

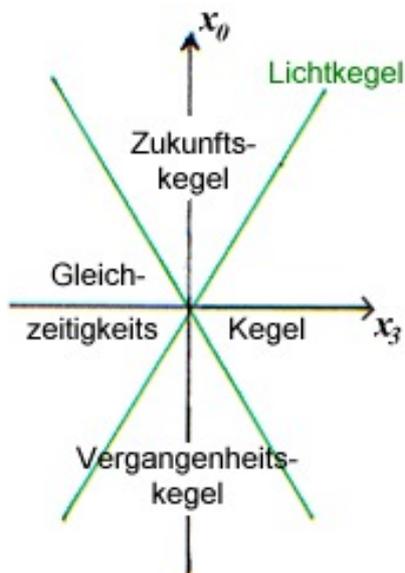


Abbildung 3.7: Raum-Zeit-Diagramm

ist.) Er ist in allen Inertialsystemen gleich.

3. Fall:  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ .  $\vec{x}$  heißt raumartig und liegt im Gleichzeitigkeitskegel. Es gibt kein Inertialsystem, in dem Licht (ein Signal (und damit Information wegen Kausalität)) schnell genug wäre um von Ereignis zu Ereignis zu gelangen.

Eine Länge  $l = \Delta z|_{\Delta t=0}$ , die in einem Inertialsystem ruht, ist in einem bewegten Inertialsystem kürzer:

$$\begin{aligned}
 l' &= \Delta z'|_{\Delta t'=0} = \gamma(\Delta z + \beta c \Delta t) \Big|_{\substack{\Delta t' = \gamma(\Delta t + \frac{\beta}{c} \Delta z) \\ \Rightarrow \Delta t = -\Delta z \frac{\beta}{c}}} \stackrel{!}{=} 0 \\
 &= \gamma \cdot (l - \beta^2 l) = \sqrt{1 - \beta^2} l = \frac{l}{\gamma} < l.
 \end{aligned}$$

Es muss (auch) die bewegte Länge bei  $\Delta t' = 0$  gemessen werden. Dies nennt man Längenkontraktion. Ein Beispiel hierfür ist die Lebensdauer kosmischer radioaktiver Teilchen (cf. Aufgabe 34).

### 3.4 Lorentzinvariante Formulierung physikalischer Gesetze: 1.Bsp. Doppler-Effekt

Das Relativitätsprinzips der speziellen Relativitätstheorie wird umgesetzt, indem die physikalischen Gesetze mit Minkowski-Tensoren formuliert werden (z.B. Skalarprodukt  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ , welches ein Lorentz-Skalar ist, der „Lorentz-invariant“ ist, oder ein Vierervektor, ...), so dass sie Lorentz-forminvariant sind, d.h. in allen Inertialsystemen gleich lauten.

Die Phase einer elektromagnetischen Welle  $\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$  entspricht einem Skalarprodukt

$$\varphi = g_{\mu\nu} k^\mu x^\nu = k_\mu x^\mu$$

mit zwei Vierervektoren  $x^\mu = (ct, \vec{r})$  und  $k^\mu = \left( k^0 = \frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$ . Der Vierervektor  $k_\mu k^\mu = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2$  der Dispersionsrelation elektromagnetischer Wellen im Vakuum ist invariant in allen Inertialsystemen.

Bei Transformation auf ein bewegtes Inertialsystem  $IS'$  geht  $k$  über in  $k'^\mu = L_\nu^\mu k^\nu$ . Für eine spezielle Lorentz-Transformation ( $\vec{v} \parallel \hat{z}$ ), also

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma(\omega + vk_z) \\ k'_z &= \gamma\left(k_z + \frac{\omega v}{c^2}\right) \\ k'_x &= k_x \end{aligned}$$

mit  $k_z = \frac{\omega}{c} \cos(\vartheta)$ ,  $k_x = \frac{\omega}{c} \sin(\vartheta)$ ,  $k'_y = 0 = k_y$  beschreibt eine Kugelwelle, die bei  $t = t' = 0$  bei  $z = z' = 0$  emittiert wurde, wobei  $KS$  und  $KS'$  relativ mit  $\vec{k} \cdot \vec{v} = k_z \cdot v$  bewegt sind.

### 3.4.1 Longitudinaler Dopplereffekt

Beim Longitudinalen Dopplereffekt gilt  $\vartheta = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} k'_x &= k_x = 0 \\ k'_z &= \frac{\omega}{c} \\ \omega' &= \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \omega = \left( 1 + \underbrace{\left(\frac{v}{c}\right)}_{\text{linear}} + \mathcal{O}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \right) \omega, \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right)}}.$$

Die Frequenz erhöht sich, wenn der Abstand zwischen Sender und Empfänger durch die Relativbewegung mit  $\vec{v}$  abnimmt.

#### 3.4.1.1 Transversaler Dopplereffekt

Nun haben wir  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  und somit

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\omega}{c} = k'_x \\ k_z &= 0 \\ \omega' &= \frac{\omega}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \left( 1 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{v}{c}\right)^2}_{\text{quadratisch}} + \dots \right) \omega. \end{aligned}$$

Hier ist der Effekt quadratisch kleiner. Er fehlt in der klassischen Beschreibung.

## 3.5 Relativistische / Einstein'schen Mechanik

### 3.5.1 Weltlinie und Eigenzeit

Betrachte Abbildung 3.8. Eine Kurve mit beliebigem Bogenparameter  $s$  in der Raumzeit heißt Weltlinie,

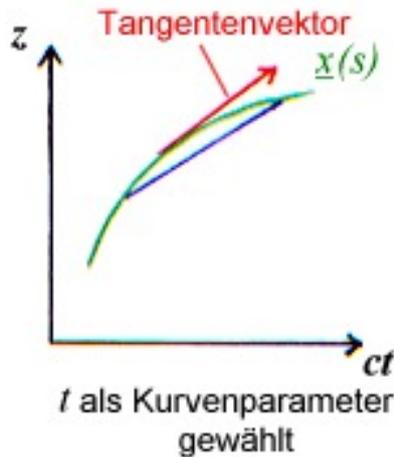


Abbildung 3.8: Weltlinie mit Längenelement  $dl$ .

wenn der infinitesimale Abstand ein zeitartiger Vektor  $dl^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 > 0$  erfüllt. Mit der Wahl von  $t$  als Bogenparameter folgt  $dl^2 = c^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) dt^2$ . Die Relation  $dl^2 = c^2 d\tau^2$  gibt einen „natürlichen Bogenparameter“, die so genannte „Eigenzeit“  $\tau$ , mit Relation zu  $t$ :  $d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt$ , also  $dt = \gamma d\tau$ .

$\tau$  ist die Eigenzeit der Weltlinie, die von der Uhr gemessen wird, welche sich mit der Kurve mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  mitbewegt. ( $dt > d\tau$  wegen Zeitdilatation.)

Annahme: Die Bewegung eines Massepunktes mit Ruhemasse  $m$  entspricht einer Weltlinie im Minkowski-Raum.

### 3.5.2 Vierergeschwindigkeit

Wird die Weltlinie durch die Eigenzeit  $\tau$  (auf der Uhr des Teilchens) parametrisiert, d.h.  $\vec{x}(\tau)$ , so heißt der Tangenten-Vierervektor

$$u^\mu(\tau) = \frac{d}{d\tau} x^\mu = \dot{x}^\mu$$

Vierergeschwindigkeit. Der Zusammenhang mit der Dreiergeschwindigkeit  $\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$  ist

$$u^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} x^\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix},$$

da ja  $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}(t) \end{pmatrix}$ .

**Bemerkung:**

Weil  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$  Lorentz-invariant ist, d.h.

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$$

ist in allen Inertialsystemen gleich, folgt, dass die Beschleunigung  $a^\mu = \frac{d}{d\tau}u^\mu$  senkrecht zur Geschwindigkeit steht:

$$0 = \frac{d}{d\tau}c^2 = \frac{d}{d\tau}u^\mu u_\mu = 2 \left( \frac{du^\mu}{d\tau} \right) u_\mu = 2a^\mu u_\mu.$$

**3.5.3 Viererimpuls****3.5.3.1 Relativistische Energie-Impuls-Relation**

Der Räumliche Impuls  $\vec{p}$  wird durch die nullte Komponente  $\frac{E}{c}$  mit totaler Energie  $E$  des Massepunktes zum Viererimpuls

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

mit Lorentz-invarianter Länge

$$p_\mu p^\mu = \left( \frac{E}{c} \right)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

(Einstein 1905).

**Bemerkung:**

Einstein'sche Motivation Die Länge des Impulses muss  $m$  und  $c$  enthalten und es muss sich die klassische Physik nach Newton ergeben für  $v \ll c$  (siehe (??)). D.h. im Ruhesystem (mit  $p = 0$ ) gilt

$$E = mc^2. \quad (3.5.1)$$

In Worten: Ruheenergie =  $c^2$  mal Ruhemasse. Allgemein gilt

$$E = \sqrt{(mc)^2 + c^2 p^2}, \quad (3.5.2)$$

die relativistische Energie-Impuls-Relation. Für  $p \ll mc$  erhält man die Newton'sche Beschreibung:

$$E \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}. \quad (3.5.3)$$

$\frac{p^2}{2m}$  ist ja die kinetische Energie nach Newton.

**Bemerkung:**

Die Energie-Masse Äquivalenz lässt sich bei der Kernspaltung bzw -fusion beobachten (Deuterium + Tritium  $\rightarrow$  He + n verbrennt,  $\frac{\Delta m}{m_{\text{He}}} = 8 \cdot 10^{-3} \hat{=} 18\text{MeV}$ ).

**3.5.3.2 Träge Masse**

Die Verbindung zwischen Kinematik (Bahnen ( $x^\mu$ )) und Dynamik (Impuls  $p^\mu$ ) ist gegeben durch

$$p^\mu = m \cdot u^\mu \quad (3.5.4)$$

(à la Newton), womit  $p_\mu p^\mu = m^2 c^2 = m^2 u_\mu u^\mu$  konsistent ist und es folgt

$$p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \gamma m \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} =: m(v) \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Die träge Masse ist definiert als  $m(v) = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ . Es gilt weiter

$$\begin{aligned} E &= m(v)c^2, \\ \vec{p} &= m(v)\vec{v}. \end{aligned}$$

Der Massepunkt bewegt sich also mit träger Masse  $m(v)$ , wenn er die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  relativ zum Labor hat.

### 3.5.4 Einstein'sche Bewegungsgleichung

In unserem relativistischen Modell fehlt noch die Wirkung von Kräften.

#### 3.5.4.1 Minkowski-Kraft $F^\mu$

Es gilt

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu \quad \text{à la Newton,}$$

wobei  $\tau$  die Eigenzeit ist und  $p^\mu$  und  $F^\mu$  jeweils Vierervektoren. Die eigenzeitliche Änderung des Impulses ist gegeben durch Krafteinwirkung. Daraus folgt die Bahn.

#### Beweis:

Wegen  $p_\mu \dot{p}^\mu = 0$  muss gelten  $p_\mu F^\mu = 0$ . Damit folgt  $0 = p_\mu F^\mu = m u_\mu F^\mu = m(cF^0 - \vec{v} \cdot \vec{F})$  mit Dreiervektoren  $\vec{F}$  und  $\vec{v}$ . Es ist also  $F^0 = \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{F}$  die nullte Komponente der Minkowski-Kraft zur „Raumkraft“  $\vec{F}$ .

#### 3.5.4.2 Lorentz-Kraft $F_{\text{Lorentz}}^\mu$

Die Lorentz-Kraft ist ein wichtiges Beispiel für eine Minkowski-Kraft. Sie beschreibt die Wirkung gegebener elektromagnetischer Felder auf mit Ladung  $q$  geladene Teilchen gemäß

$$F_{\text{Lorentz}}^\mu = q \cdot \gamma \begin{pmatrix} \vec{E} \cdot \vec{v}/c \\ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \end{pmatrix}, \quad (3.5.5)$$

wobei  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  die vertrauten Dreiervektoren der elektromagnetischen Felder sind, die Ladung  $q$  ist ein Lorentz-Skalar. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F_{\text{Lorentz}}^\mu. \quad (3.5.6)$$

Wegen  $\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$  folgt

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m(v)c^2 \\ m(v)\vec{v} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \vec{E} \cdot \vec{v} \\ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \end{pmatrix}. \quad (3.5.7)$$

Diese Gleichung ist gültig für beliebiges  $v < c$ .

**Bemerkung:**

Die nullte Komponente gibt die richtige Leistung nach Joule:  $\frac{d}{dt}E = q\vec{E} \cdot \vec{v}$ .

**Bemerkung:**

Die Bahnen geladener Teilchen mit  $v \geq 0,1c$  erlauben den experimentellen Nachweis relativistischer Effekte.

**Beispiel:**

- Massepunkt im homogenen, konstanten Magnetfeld (Synchrotron), Theo. Aufg. 23, Exp. Aufg. 34  
⇒ Larmorfrequenz  $\omega_L(v) = \frac{qB}{m(v)}$ , Radius der Kreisbahn  $r_0(v) = \frac{m(v)v_x^0}{qB}$ .
- Relativistische Korrekturen der Atomspektren (cf. IK4). Dazu ist aber Quantenmechanik nötig.



# Kapitel 4

## Analytische Mechanik

### 4.1 Vorbemerkungen

- Grundlegend ist die Newton'sche Bewegungsgleichung (cf. IK I) für  $N$  Massepunkte („Teilchen“) mit Massen  $m_i$ , mit  $i = 1, \dots, N$ . Die Beschleunigungen der Teilchen folgen aus den Kräften  $i$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \vec{F}_{i,j}^{\text{int}}. \quad (4.1.1)$$

Hierbei ist  $\ddot{\vec{r}}_i$  die Beschleunigung des  $i$ -ten Teilchens,  $m_i \ddot{\vec{r}}_i$  ist die Änderungsrate des Impulses,  $\vec{F}_i^{\text{ext}}$  ist die äußere Kraft (z.B. Schwerfeld), die auf das Teilchen  $i$  wirkt und  $\vec{F}_{i,j}^{\text{int}}$  ist die vom Teilchen  $j$  auf das Teilchen  $i$  ausgeübte interne Kraft, z.B. hervorgerufen durch Ladungen.

Es ist schon bekannt, dass diese  $f = 3N$  inhomogenen, gekoppelten, nicht linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zusammen mit  $2f$  Anfangsbedingungen die Bahnen (Bewegungen) der Teilchen festlegen. Hierbei bezeichnet  $f$  die Zahl der Freiheitsgrade, welche der Anzahl der Gleichungen entspricht.

- Die Formulierung der Mechanik nach Lagrange, Hmliton, etc. (genannt „analytische Mechanik“) leisten das selbe und sind häufig leichter lösbar ( $\leadsto$  „technische Mechanik“).
- Prinzipien der Variationsrechnung liegen der analytischen Mechanik zu Grunde (cf. „Fermat'sches Prinzip der geometrischen Optik“), wurden in der analytischen Mechanik entwickelt und wurden in alle Bereiche der Physik übertragen.
- Die Quantenmechanik und die allgemeine Relativitätstheorie sind Verallgemeinerungen von Konzepten aus der analytischen Mechanik. Die Verknüpfung von Symmetrie und Erhaltungsgrößen ist ein wichtiges Konzept.

### 4.2 Grundzüge der Variationsrechnung

#### 4.2.1 Motivation und klassische Beispiele

Es seien zwei Punkte  $A$  und  $B$  mit Ortsvektoren  $(x_A, y_A)$  und  $(x_B, y_B)$  in der  $x$ - $y$ -Ebene gegeben. Es ist nun interessant, was die kürzeste Bahn oder Kurve ist, welche die beiden Punkte verbindet. Hierfür muss

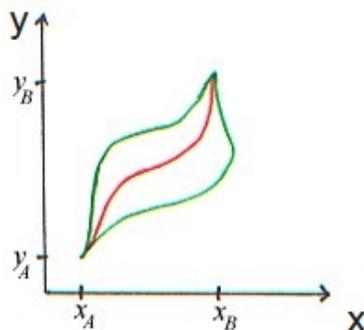


Abbildung 4.1: Zwei Punkte samt verschiedener verbindender Bahnen.

erst der Begriff „Kurve“ geklärt werden.

**Definition:** Bahn

Eine Bahn ist eine Abbildung  $\mathcal{C} : I \rightarrow \mathbb{R}^f$  mit  $I = [t_A, t_B]$ , die durch  $f$  stetige und stetig differenzierbare Funktionen  $q_i(t)$  mit  $i = 1, \dots, f$  gegeben ist (Abkürzung:  $\vec{q}(t) \in \mathbb{R}^f$ ). Später wird  $t$  oft die Zeit sein.

**Beispiel:**

Es seien also alle Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$ , sowie  $\dot{x}(t)$  und  $\dot{y}(t)$  stetig für  $t_A \leq t \leq t_B$  mit  $x(t_A) = x_A$ ,  $x(t_B) = x_B$ ,  $y(t_A) = y_A$ ,  $y(t_B) = y_B$  durch die Randpunkte betrachtet. Die Länge der Bahn  $\mathcal{C}$  ist

$$l(\mathcal{C}) = \int_A^B ds \quad (4.2.1)$$

mit  $ds$  als Inkrement der Bogenlänge  $s$ . Nun muss noch die Bogenlänge  $s$  in Abhängigkeit von  $t$  bestimmt werden. Hierfür betrachten wir den Tangentenvektor  $\dot{q}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$  an die Bahn  $\mathcal{C}$  im Punkt  $\vec{q}(t)$  (cf. Abbildung 4.2). Damit folgt für die Länge  $\Delta s$  der Bogenlänge

$$\Delta s = |\vec{q}(t + \Delta t) - \vec{q}(t)|. \quad (4.2.2)$$

Dies wird nun Taylor-entwickelt in  $\Delta t$ . Man erhält

$$\Delta s = |\dot{\vec{q}}(t) \cdot \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)| = |\dot{\vec{q}}(t)| \cdot \Delta t. \quad (4.2.3)$$

Wenn  $\Delta t$  infinitesimal klein wird, folgt  $ds = |\dot{\vec{q}}(t)| dt$ . Damit haben wir

$$l(\mathcal{C}) = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{(\dot{\vec{q}}(t))^2}. \quad (4.2.4)$$

In der  $x$ - $y$ -Ebene gilt daher

$$l(\mathcal{C}) = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}. \quad (4.2.5)$$

Die Bahn kann nun folgendermaßen umparametrisiert werden. Es wird an dieser Stelle darauf verzichtet zu diskutieren, wann dies genau möglich ist. Sei  $x(t)$  umkehrbar zu  $t(x)$  mit  $t(x_A) = t_A$  und  $t(x_B) = t_B$ ,

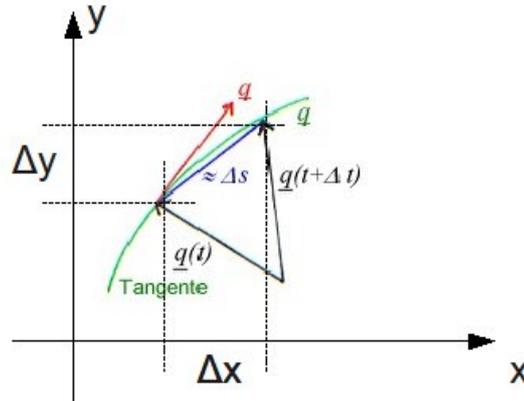


Abbildung 4.2: Tangentenvektor  $\dot{q}$  an die Bahn  $\mathcal{C}$ .

sowie  $dt = \frac{dt}{dx} dx = \frac{dx}{\dot{x}}$  und  $\dot{y} = \frac{d}{dt} y(x(t)) = \frac{dy(x)}{dx} \dot{x} = y'(x)\dot{x}$ . In Abbildung 4.2 sehen wir, dass  $\Delta y = y' \Delta x$  und somit  $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + y'^2} \Delta x$ . Damit haben wir

$$l(\mathcal{C}) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \sqrt{\dot{x}^2 + y'^2 \dot{x}^2} = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + (y'(x))^2} \tag{4.2.6}$$

für  $\dot{x} > 0$ . Schließlich interessiert die Frage, welche Funktion  $y(x)$  die Länge  $l$  minimiert. Man beachte hierbei, dass  $l[y]$  eine Abbildung ist, die den Funktionen  $y(x)$  eine reelle Zahl (die Länge) zuordnet. Man nennt  $l$  ein Funktional von  $y(x)$ .

In einer allgemeineren Herangehensweise betrachten wir das Bahnfunktional  $S$ . Es handelt sich hierbei um eine Abbildung aller Bahnkurven  $\mathcal{C}$  in die reellen Zahlen, gegeben durch das Integral über die Dichtefunktion  $L : \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entlang der jeweiligen Bahnkurve  $\mathcal{C}$ , also

$$S[\vec{q}(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t). \tag{4.2.7}$$

Wenn die Bahnkurve  $\mathcal{C} : t \mapsto \vec{q}(t)$  gegeben ist, dann ist  $L = L(t)$  bekannt und  $S$  ergibt sich durch Integration. In der Variationsrechnung wird die Bahn  $\mathcal{C}$ , also  $\vec{q}(t)$  so bestimmt, dass  $S$  minimal ist. (Eigentlich wird nur durch Nullsetzen der Ableitung eine Extremstelle von  $S$  bestimmt. Ob es sich um ein Minimum handelt, kann man aber in aller Regel durch einfache Überlegungen herausfinden.) Die Abhängigkeit von  $t_B - t_A$  interessiert hierbei nicht.

### 4.2.2 Die Euler'sche Gleichung

Es sei ein Bahnintegral  $S[q(t)]$  durch

$$S[q(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \tag{4.2.8}$$

für die eindimensionale Bahn  $q(t)$ , die durch  $q_A$  bei  $t = t_A$  und  $q_B$  bei  $t = t_B$  geht, gegeben. Das heißt  $\mathcal{C} = \{(q, t) : q = q(t), q \& \dot{q} \text{ stetig für } t_A \leq t \leq t_B, q(t_A) = q_A, q(t_B) = q_B\}$  und sei  $L$  stetig differenzierbar.

Nun geht es darum, welche Bahn  $q(t) = q_0(t)$   $S$  minimiert. (Hierbei bezeichnet  $q_0(t)$  die extremale Bahn.) Wir vergleichen die Bahnen  $q(t) = q_0(t) + \varepsilon h(t)$ , wobei  $h(t_A) = h(t_B) = 0$  gelten muss, damit alle Bahnen  $q(t)$  durch die Endpunkte gehen. Ansonsten ist  $h(t)$  eine beliebige Funktion. Die Frage ist nun, welches  $q_0(t)$  bei der Taylor-Entwicklung von  $S$  in  $\varepsilon$ ,

$$S[q_0(t) + \varepsilon h(t)] = S_0 + \varepsilon S' + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{4.2.9}$$

(wobei  $S_0 = S[q_0]$ ) für beliebiges  $h(t)$  auf  $S' = 0$  führt.

**Bemerkung:**

- Dieses Problem lässt sich lösen, indem man das Extremum der Funktion  $S(\varepsilon)$  ermittelt.
- Ob es sich bei dem Extremum dann um ein Minimum oder ein Maximum handelt ist für die Betrachtungen der analytischen Mechanik im allgemeinen unwichtig.

Wir setzen (4.2.8) in (4.2.9) ein und haben

$$S[q_0(t) + \varepsilon h(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(q_0(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}_0(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t).$$

Nun führen wir die Taylorentwicklung in  $\varepsilon$  durch und erhalten

$$S(q_0(t) + \varepsilon h(t)) = \int_{t_A}^{t_B} dt L(q_0(t), \dot{q}_0(t), t) + \int_{t_A}^{t_B} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=\dot{q}_0}} h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=\dot{q}_0}} \dot{h}(t) \right) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Nun wird partiell integriert, um nur Terme, die proportional zu  $h$  sind zu erhalten und zusammenzufassen:

$$\dots = S[q_0] + \varepsilon \left( \int_{t_A}^{t_B} \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)}_{=*} \Big|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=\dot{q}_0}} h(t) dt + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=\dot{q}_0}} h}_{\substack{\text{wegen } h(t_{A,B}) = 0 \text{ fallen} \\ \text{diese Randterme weg}}} \Big|_{t_A}^{t_B} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Damit der in  $\varepsilon$  lineare Term für alle beliebigen  $h(t)$  verschwindet, muss also  $* = 0$  entlang der Bahn (also für alle  $t_A \leq t \leq t_B$ ) gelten, also

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=\dot{q}_0}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=\dot{q}_0}} = 0.} \tag{4.2.10}$$

Damit haben wir die Euler'sche Gleichung hergeleitet.

**Beispiel:** Kürzeste Bahn  $\mathcal{C}$  in der Ebene

Die Länge  $l$  ist gegeben durch

$$l(\mathcal{C}) = \int_{x_A}^{x_B} dx L(y(x), \frac{dy}{dx} = y', x).$$

Dies entspricht dem allgemeinen Term  $l(\mathcal{C}) = \int_{t_A}^{t_B} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)$  mit  $r = x$  und  $L(y, y', x) = L(y') = \sqrt{1 + (y')^2}$ . Übertragen auf die Euler'sche Gleichung (4.2.10) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \\ \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} &= \text{konst.} =: c_1 \\ \Leftrightarrow (y')^2 &= c_1^2 (1 + (y')^2) \\ \Leftrightarrow (y')^2 &= \frac{c_1^2}{1 - c_1^2} =: c_2 = \text{konst.} \\ \Rightarrow y(x) &= ax + b, \end{aligned}$$

also eine Gerade. Setzt man die Randpunkte ein, so ergibt sich

$$y(x) = y_A + (y_B - y_A) \frac{x - x_A}{x_B - x_A}.$$

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in einer Ebene ist also die Gerade.

### **Bemerkung:**

Eine Variable  $q_i$ , die nicht explizit in  $L$  auftritt, d.h.  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , heißt zyklisch. Die zugehörige Größe  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  ist dann eine Erhaltungsgröße, d.h.  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.}$  Dieser Sachverhalt ergibt sich unmittelbar aus der Eulergleichung (4.2.10):

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Wir wollen diese Betrachtung nun auf Bahnen im  $\mathbb{R}^f$  verallgemeinern.

### **Satz:**

Die Bahnkurve  $\mathcal{C}$  im  $\mathbb{R}^f$  gegeben durch  $\{(\vec{q}, t) : \vec{q} = \vec{q}(t), \text{ d.h. } q_i = q_i(t) \text{ für } i = 1, \dots, f \text{ mit } f \text{ stetigen und stetig differenzierbaren Funktionen } q_i(t) \text{ für } t_A \leq t \leq t_B\}$  ist Extremalkurve des Bahnfunktionals

$$S = \int_{t_A}^{t_B} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) \quad (4.2.11)$$

mit Lagrange-Dichte  $L : \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}$  unter Vorgabe bestimmter Randpunkte  $\vec{q}(t_{A,B}) = \vec{q}_{A,B}$  (man sagt dann auch  $S[q]$  ist stationär) genau dann, wenn die Euler'sche Gleichungen (4.2.10) erfüllt sind

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad \text{für } i = 1, \dots, f \quad (4.2.12)$$

### **Beweis:**

Die  $f$  Vergleichsfunktionen  $\vec{q}(t, \varepsilon)$  erfüllen

$$\begin{aligned} \vec{q}(t, \varepsilon = 0) &= \vec{q}(t) && \text{(extremale Bahn)} \\ \vec{q}(t, \varepsilon) &= \vec{q}(t) + \left. \frac{\partial \vec{q}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) && \text{(kleine Variation)} \\ \vec{q}(t = t_{A,B}, \varepsilon) &= \vec{q}(t_{A,B}) = \vec{q}_{A,B} && \text{(alle Bahnen gehen durch die Randpunkte)} \end{aligned}$$

Man führt nun für die einzelnen Komponenten  $i$  die selbe Rechnung wie vorher durch, nur mit Indizes. Zunächst setzen wir

$$\Delta S := S[\vec{q}(t, \varepsilon)] - S[\vec{q}(t)].$$

Nun führen wir von  $\Delta S$  die Taylor-Entwicklung in  $\varepsilon$  durch und erhalten

$$\Delta S = \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} \left( \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial q_i(t, 0)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(t, \varepsilon=0)}{\partial \varepsilon} \right) \right) dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Wegen  $\frac{\partial \dot{q}_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} q_i(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}$  (man darf ja die Ableitungen vertauschen), kann man partiell integrieren und hat also

$$\frac{\Delta S}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_A}^{t_B} \left( \sum_{i=1}^f \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{**} \frac{\partial q_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) dt + \underbrace{\sum_{i=1}^f \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \overbrace{q_i(t, \varepsilon)}^{q_{A,B}} \frac{\partial L}{\partial q_i}}_{=0, \text{ weil alle Bahnen durch die Randpunkte gehen}} \Big|_{t_A}^{t_B}.$$

Da  $\frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$  beliebige  $f$  Funktionen für  $t_A \leq t \leq t_B$  sind, muss  $** = 0$  für jedes  $i = 1, \dots, f$  alleine und jede Zeit  $t_A \leq t \leq t_B$  gefordert werden.  $\square$

**Bemerkung**

- In der Mechanik ist zumeist  $L$  die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie.
- Die Euler'schen Gleichungen sind  $f$  gekoppelte, implizite, gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Hierbei variiert  $L$  mit der Zeit (möglicherweise explizit und), da  $L$  von den mit der Zeit variierenden Orten abhängt.

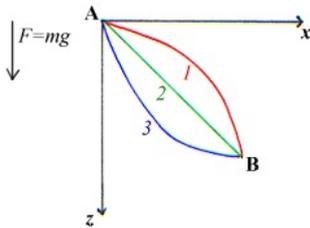
**Beispiel:** Kürzeste Bahn in der Ebene (von Oben)

Es gilt  $f = 2$ ,  $\vec{q} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  $l(\mathcal{C}) = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ , also lautet  $L \left( \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right) = \vec{q}(t)$ ,  $\left( \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right) = \dot{\vec{q}}, t$

hier  $L = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = L(\dot{x}, \dot{y})$ . Dies setzen wir in die Euler'sche Gleichung (4.2.10) ein:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} &= \text{konst.} =: c_1; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} &= \text{konst.} =: c_2; \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c_2}{c_1} = \text{konst.} \\ \Rightarrow y &= a + bx \quad (\text{Gerade}) \end{aligned}$$

### 4.2.3 Klassisches Beispiel: Brachistochrone



Eine Brachistochrone ist die schnellste Verbindung zweier Punkte A und B durch eine Kurve, auf der ein Massepunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei gleitet. Eine derartige Kurve wird im Folgenden gesucht.

Das Teilchen mit der Masse  $m$  bei A oberhalb B ( $z_A = 0, z_A < z_B$ ) ist anfänglich in Ruhe. Die Zeit  $t$  zum Durchlaufen der Bahn mit  $ds$  als Bogenlängenelement und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist wegen  $ds = |\vec{v}|dt$

$$t(\mathcal{C}) = \int dt = \int_A^B ds \frac{1}{v}. \tag{4.2.13}$$

Die Geschwindigkeit  $v$  entlang der Bahn folgt aus der Energieerhaltung

$$\frac{m}{2} v^2 - mgz = E = \text{konst.} = 0. \tag{4.2.14}$$

Die Konstante ist 0 wegen der Wahl der Anfangsbedingung  $z_A = 0 = v_A$ . Damit ergibt sich (mit  $z' = \frac{dz}{dx}$ )

$$t(\mathcal{C}) = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{2gz}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{\frac{1 + (z'(x))^2}{z(x)}}. \tag{4.2.15}$$

Wir wollen ja die Zeit, in der unsere Bahn durchlaufen wird, minimieren. Das heißt,  $t(z(x))$  mit Lagrange-Dichte

$$L(z, z', x) = L(z, z') = \sqrt{\frac{1 + z'^2}{z}}$$

soll minimal werden. Wir wenden nun die Euler-Gleichung (4.2.10) an:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z'} = \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{(-2)z^{3/2}} - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{z(1 + z'^2)}}. \tag{4.2.16}$$

Dies führt also zu einer komplizierten Differentialgleichung zweiter Ordnung mit  $z''$ . Wir wenden daher einen wichtigen Trick ( $\hat{=}$  Energieerhaltung in der Mechanik) an: Multiplikation mit  $z'$ . Wir erhalten

$$z' \frac{\partial L}{\partial z} - z' \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z'} = \frac{\partial L}{\partial z} z' - \frac{d}{dx} z' \frac{\partial L}{\partial z'} + \frac{\partial L}{\partial z'} z''.$$
 (4.2.17)

Weil  $\frac{d}{dx} L(z(x), z'(x), x) = \frac{\partial L}{\partial z} z' + \frac{\partial L}{\partial z'} z'' + \frac{\partial L}{\partial x}$ , gilt

$$0 = \frac{d}{dx} \left( \underbrace{L - z' \frac{\partial L}{\partial z'}}_{=\text{konst.}} \right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}}_{=0, \text{ weil } L \text{ gar nicht explizit von } x \text{ abhängt}}.$$
 (4.2.18)

**Fazit:**

Für  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$  folgt  $L - z' \frac{\partial L}{\partial z'} = -E = \text{konst.}$ . Wenn die Lagrange-Dichte  $L$  nicht explizit vom Bahnparameter (hier  $x$ , in der Mechanik oft  $t$ ) abhängt, d.h.  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$  ( $L$  ist autonom), dann folgt die Erhaltungsgröße

$$E = z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L = \text{konst.}$$
 (4.2.19)

Der Vorteil hierbei ist, dass  $z''$  in  $E$  nicht auftaucht. In unserem Beispiel gilt

$$\begin{aligned} E &= z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L = \frac{z' z'}{\sqrt{z(1+z'^2)}} - \sqrt{\frac{1+z'^2}{z}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{z(1+z'^2)}} (z'^2 - 1 - z'^2) = -\frac{1}{\sqrt{z(1+z'^2)}} \\ \Leftrightarrow z(1+z'^2) &= 2a \\ \Leftrightarrow z' &= \frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\frac{2a-z}{z}} \end{aligned}$$
 (4.2.20)

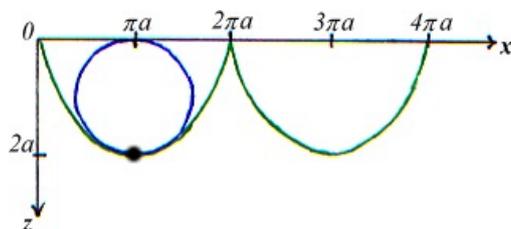
Hierbei ist  $a$  eine Konstante mit Einheit Länge. Wir wählen  $z' > 0$  und führen bei (4.2.20) eine Trennung der Variablen durch. Dies führt zu

$$\int dx = x - x_0 = \int dz \sqrt{\frac{z}{2a-z}}.$$

Mit der Variablensubstitution  $z = a(1 - \cos(\vartheta)) \Leftrightarrow dz = a \sin(\vartheta) d\vartheta$  hat man

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int d\vartheta \sin(\vartheta) \sqrt{\frac{a(1 - \cos(\vartheta))}{a(1 + \cos(\vartheta))}} \\ &= \int d\vartheta a \sin(\vartheta) \sqrt{\frac{\sin^2(\frac{\vartheta}{2})}{\cos^2(\frac{\vartheta}{2})}} \\ &= 2a \int d\vartheta \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = a(\vartheta - \sin(\vartheta)). \end{aligned}$$
 (4.2.21)

D.h. in Parametrisierung mit  $\vartheta$  (dem Winkel) ist die Brachistochrone gegeben durch  $z = a(1 - \cos(\vartheta))$  und  $x = a(\vartheta - \sin(\vartheta)) + x_0$  und ist somit stückweise zyklod. Die Integrationskonstanten  $x_0$  und  $a$ , sowie



**Abbildung 4.3:** Schaubild einer Zyklode, gegeben durch die Bewegung eines Punktes auf dem Umfang eines abrollenden Rades mit Radius  $a$ .

$\vartheta_A$  und  $\vartheta_B$  folgen aus den Randbedingungen.

Bei A:  $x(\vartheta_A) = 0 = z(\vartheta_A)$  und  $\frac{dz}{dx}(\vartheta_A) = 0 = \frac{dx(\vartheta_A)}{d\vartheta_A} \Rightarrow \vartheta_A = 0, x_0 = 0$ .

Bei B:  $x_B$  und  $z_B$  legen  $a$  und  $\vartheta_B$  fest (eindeutig für  $\vartheta_B < 2\pi$  lösbar).

## 4.3 Lagrange-Mechanik

### 4.3.1 Prinzip von Hamilton

#### 4.3.1.1 Newton'sche Bewegung eines Massepunktes im Potential.

Nach Newton lässt sich über die Bewegung eines Massepunktes auf einer Bahn folgendes aussagen.

Bahn:	$t \mapsto \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$
Geschwindigkeit:	$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}} \in \mathbb{R}^3$
kinetischer Impuls:	$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \frac{m}{2} v^2 = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} T$ $\Rightarrow mv_x = \frac{\partial}{\partial v_x} \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$
kinetische Energie:	$T = \frac{m}{2} v^2$
Kraft aus Potential:	$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} U(\vec{r}(t), t)$

Wir wissen, dass  $\frac{\partial U}{\partial v} = 0$ , da  $U$  unabhängig von der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  ist, sowie, dass  $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} T(\dot{\vec{r}}) = 0$ , da  $T$  unabhängig vom Ort  $\vec{r}$  ist. Also ist obige Gleichung (4.3.2) äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}} (T(\dot{\vec{r}}) - U(\vec{r}, t)) \right) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (T(\dot{\vec{r}}) - U(\vec{r}, t)). \quad (4.3.1)$$

Wendet man all dies auf die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$$

an, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}} \left( T(\dot{\vec{r}}) - U(\vec{r}, t) \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left( T(\dot{\vec{r}}) - U(\vec{r}, t) \right). \quad (4.3.2)$$

Im Vergleich erkennt man also, dass die Newton'sche Bewegungsgleichung der Euler-Gleichung zur Lagrange-Dichte

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T - U = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}, t) \quad (4.3.3)$$

entspricht. Das Hamilton'sche Prinzip besagt, dass Bewegungsbahnen des Massepunktes (Parameter  $m$ ) Extremalen der Wirkung

$$S[\vec{r}(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \quad (4.3.4)$$

sind.

**Bemerkung:**

- Das Hamilton'sche Prinzip heißt auch „Prinzip der kleinsten Wirkung“.
- In der Analytischen Mechanik heißen die Euler-Gleichungen Euler-Lagrange-Gleichungen (EL-Gl.).

**4.3.1.2 Konservative N-Teilchen-System**

Mit der Newton'schen Mechanik lassen sich die Bewegungen wieder folgendermaßen beschreiben.

$$\begin{aligned} \text{Bahn:} & \quad t \mapsto \vec{r}(t) = (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t)) \in \mathbb{R}^{3N} \\ \text{Geschwindigkeit:} & \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{\vec{r}}_1(t), \dot{\vec{r}}_2(t), \dots, \dot{\vec{r}}_N(t)) \in \mathbb{R}^{3N} \\ \text{Impuls:} & \quad \vec{p}(t) = (\vec{p}_1(t), \vec{p}_2(t), \dots, \vec{p}_N(t)) \in \mathbb{R}^{3N} \\ & \quad \text{mit } \vec{p}_i(t) = m_i \vec{v}_i(t) \text{ und Masse } m_i \text{ des } i\text{-ten Teilchens} \end{aligned}$$

Es liege ein konservatives Kraftfeld vor. Das bedeutet, dass ein Potential  $U$  existiert. Für die Kraft  $\vec{F}$  gilt  $\vec{F} = (\vec{F}_1(\vec{r}), \dots, \vec{F}_N(\vec{r})) \in \mathbb{R}^{3N}$  mit  $\vec{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U(\vec{r})$ . Es gibt also ein Potential für alle Teilchen.

**Bemerkung:**

Das Potential  $U$  kann folgendermaßen entstehen.

(A) Durch ein externes Kraftfeld. Es gilt also

$$U = U^{\text{ext}}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N V^{\text{ext}}(\vec{r}_i), \quad (4.3.5)$$

wobei  $V^{\text{ext}}$  das externe Potential ist. Dieses Potential wirkt auf alle Teilchen gleich! (Sonst läge kein konservatives Kraftfeld vor.)

(B) Durch eine interne (Paar-)Wechselwirkung. Dann gilt

$$U^{\text{int}} = \sum_{i'=1}^N \sum_{j=1}^{i'-1} V^{\text{int}}(\vec{r}_{i'} - \vec{r}_j), \quad (4.3.6)$$

wobei  $V^{\text{int}}(\vec{r}) = V^{\text{int}}(-\vec{r})$ . Es ist eine symmetrische Funktion gefordert, damit *actio = reactio* (das dritte Newton'sche Axiom) erfüllt ist. Sei  $F_{ij}^{\text{int}}$  die auf das  $i$ -te Teilchen einwirkende Kraft, die vom  $j$ -ten Teilchen ausgeübt wird. Es gilt

$$F_{ij}^{\text{int}} = -\frac{\partial V^{\text{int}}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial V^{\text{int}}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{\partial \vec{r}_j}$$

symmetrische  
Funktion

$$\frac{\partial V^{\text{int}}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\partial \vec{r}_j} = -F_{ji}^{\text{int}}$$

Es gilt also *actio = reactio*.

**Bemerkung:**

Die interne Kraft auf ein Teilchen  $i$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U^{\text{int}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \sum_{i'=1}^N \sum_{j=1}^{i'-1} V^{\text{int}}(\vec{r}_{i'} - \vec{r}_j) \\ &= -\left( \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial V^{\text{int}}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{i'=i+1}^N \frac{\partial V^{\text{int}}(\vec{r}_{i'} - \vec{r}_i)}{\partial \vec{r}_i} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N V^{\text{int}}(\vec{r}_i - \vec{r}_j). \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Wegen der Symmetrie von  $V^{\text{int}}$  konnte man  $i'$  in  $j$  umbenennen. Hier sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \left( \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \dot{\vec{r}}_j^2 - U(\vec{r}) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left( \sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{m_j}{2} \dot{\vec{r}}_j^2}_{=0, \text{ da orts-}} - U(\vec{r}) \right). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

unabhängig

**Fazit:**

Die Newton'schen Bahnen des konservativen  $N$ -Teilchensystems sind Extremalen der Wirkung  $S$  (cf. (4.3.4)) zur Lagrange-Dichte

$$L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \dot{\vec{r}}_j^2 - U(\vec{r}) \quad (4.3.9)$$

**Bemerkung:**

- Wir haben festgestellt, dass in vielen Fällen gilt  $L = T - U$ , die Lagrange-Dichte ist also die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie.

- Das Konzept des Kraftvektors taucht nicht auf.
- Wir haben bei allen Überlegungen ein kartesisches Koordinatensystem verwendet. Es bleibt die Gültigkeit der Euler-Lagrange-Gleichung nach Koordinatentransformationen noch zu zeigen.

#### 4.3.1.3 Geladener Massepunkt im Magnetfeld

Nun wenden wir uns der Newton'sche Mechanik eines geladenen Massepunktes in elektromagnetischen Feldern zu. Wir betrachten also ein Teilchen mit Ladung  $q$  und Masse  $m$ . Vergleiche Abbildung 4.4. Ein

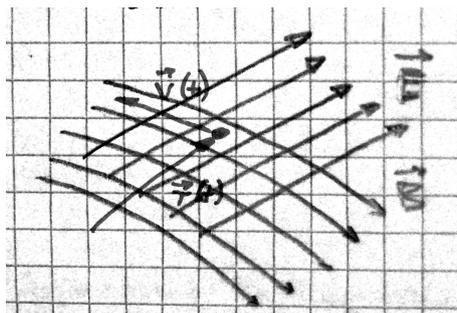


Abbildung 4.4: Geladenes Teilchen im em. Feld

solches Teilchen spürt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}(t), t) = q(\vec{E}(\vec{r}(t), t) - \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t), t)), \quad (4.3.10)$$

wobei  $\vec{v}(t)$  die Geschwindigkeit des Teilchens ist und  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  die Felder an der Position des Teilchens auszuwerten sind. Sie sind aus den elektromagnetischen Potentialen  $\varphi$  und  $\vec{A}$  bestimmbar durch  $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$ .

#### Bemerkung:

Die Potentiale  $\varphi$  und  $\vec{A}$  sind nicht eindeutig!  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\vec{A}}$  führen zu den selben  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feldern, wie  $\varphi$  und  $\vec{A}$ , wenn

$$\bar{\vec{A}} = \vec{A} + \nabla\chi \quad \text{und} \quad \bar{\varphi} = \varphi - \dot{\chi} = \varphi - \frac{\partial}{\partial t}\chi$$

für eine beliebige Funktion  $\chi = \chi(\vec{r}, t)$ .

#### Beweis:

$$\nabla \times \bar{\vec{A}} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\chi) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}.$$

$$\text{Genauso: } -\nabla\bar{\varphi} - \dot{\bar{\vec{A}}} = -\nabla\varphi - \dot{\vec{A}} + \nabla\dot{\chi} - \nabla\dot{\chi} = \vec{E}.$$

#### Beispiel: (typisch für Klausuren)

Betrachte ein homogenes Magnetfeld  $\vec{B}$  in  $z$ -Richtung

$$\vec{B} = B\hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix},$$

welches im gesamten Raum konstant ist. Dieses Magnetfeld ergibt sich sowohl aus

$$\vec{A} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

als auch aus

$$\vec{A} = B \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\chi = \frac{xy}{2}$ .

Die Wahl eines Sets  $\varphi, \vec{A}$  heist „Eichung“. Die Transformation  $\varphi, \vec{A} \rightarrow \bar{\varphi}, \bar{\vec{A}}$  heißt Umeichung.

Die  $x$ -Komponente der Newton'schen Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Lorentz-Kraft lautet für unser Teilchen also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}mv_x &= q \left( -\partial_x\varphi - \frac{\partial}{\partial t}A_x + v_y \underbrace{(\partial_x A_y - \partial_y A_x)}_{=B_z} - v_z \underbrace{(\partial_z A_x - \partial_x A_z)}_{=B_y} \right) \\ &= q(-\partial_x(\varphi - v_y A_y - v_z A_z - \underbrace{v_x A_x}_{*}) - (\partial_t + v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z)A_x(\vec{r}(t), t)) \\ &= -q \left( \frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt}A_x(\vec{r}(t), t) \right). \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

\* Diesen Term fügen wir hier dazu und heben ihn am Ende der Gleichung wieder weg. Mit den anderen Koordinaten ( $y, z$ ) machen wir das gleiche und schreiben alles zusammen hin und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\vec{v} + q\vec{A}(\vec{r}(t), t)) &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}(t), t) - q\varphi(\vec{r}(t), t)) \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(m\vec{v} + q\vec{A}(\vec{r}(t), t))} &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left[ q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}(t), t) - q\varphi(\vec{r}(t), t) + \underbrace{\frac{m}{2}v^2(t)}_{=0, \text{ da ortsunabh.}} \right] \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Wir haben jetzt die Newton'sche Bewegungsgleichung umgeschrieben, so dass nicht mehr  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  vorkommen, sondern  $\vec{A}$  und  $\varphi$ . Nach einer weiteren Umformung ergibt sich schließlich

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + q\vec{A}(\vec{r}(t), t)) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left( \frac{m}{2}v^2 - \underbrace{q\varphi(\vec{r}(t), t)}_{=0, \text{ da } v\text{-unabh.}} + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}(t), t) \right) \right]. \tag{4.3.13}$$

**Fazit:**

Die Newton'schen Bahnen eines mit  $q$  geladenen Punktes mit Masse  $m$  sind Extremalen der Wirkung, welche mit der Lagrange-Dichte

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}v^2 + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - q\varphi(\vec{r}, t) \tag{4.3.14}$$

gebildet wurden.

Es bleibt noch die fehlende Eindeutigkeit von  $\varphi$  und  $\vec{A}$  und somit von  $L$  zu diskutieren. Bei der Umeichung  $\vec{A} = \vec{A} - \nabla\chi$  und  $\bar{\varphi} = \varphi + \dot{\chi}$  ändert sich  $L$  gemäß

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}v^2 + q\vec{v} \cdot (\vec{A} + \nabla\chi) - q(\bar{\varphi} - \dot{\chi}) \\ &= \underbrace{\frac{m}{2}v^2 + q\vec{v} \cdot \vec{A} - q\bar{\varphi}}_L + q \underbrace{\left( \vec{v} \cdot \nabla\chi + \frac{\partial}{\partial t}\chi \right)}_{\frac{d}{dt}\chi(\vec{r}(t),t)}, \end{aligned}$$

es ist also  $L \neq \bar{L}$  mit

$$L = \bar{L} + q \frac{d}{dt}\chi.$$

$L$  und  $\bar{L}$  unterscheiden sich um die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion  $\chi = \chi(\vec{r}, t)$ . Die Konsequenzen, die das für die Bahnen hat, diskutieren wir später.

## 4.3.2 Elementare Beispiele

### 4.3.2.1 Eindimensionale konservative Systeme

Ein Massepunkt, dessen Position  $q(t)$  im gegebenen Potential  $U(q)$  variiert, wird in der analytischen Mechanik modelliert durch

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q) = L(q(t), \dot{q}(t)),$$

was zur Euler-Lagrange-Gleichung

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

führt.

**Beispiel:** Starres Pendel im Schwerfeld

In dem in Abbildung 4.5 abgebildeten Pendel entspricht  $q$  dem Winkel zur Normalen. Wir haben die kinetische Energie

$$T = \frac{M}{2}l^2\dot{q}^2$$

und die potentielle Energie

$$U = Mgz = Mgl(1 - \cos(q)).$$

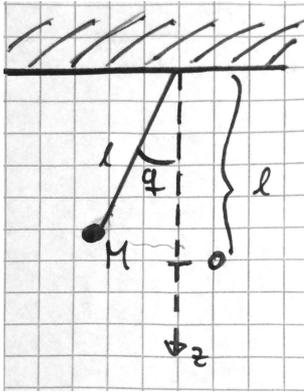
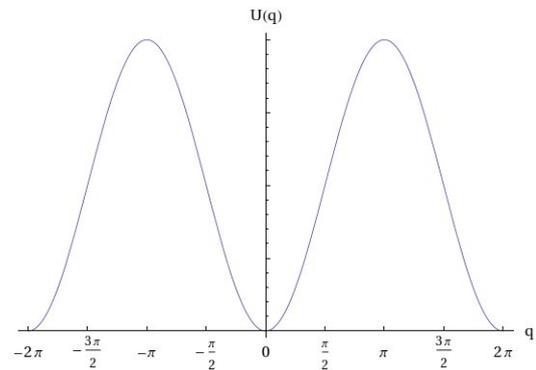
Abbildung 4.6 zeigt qualitativ das Potential der Masse  $M$ .

Weiter mit der Betrachtung von

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q),$$

(einer eindimensionalen Bewegung). Es gelte  $q \in \mathbb{R}$ , das heißt, es liegt eine eindimensionale Bewegung vor.

**Bemerkung:**

Abbildung 4.5: Mendelnde Masse  $M$ .Abbildung 4.6: Potential der Masse  $M$ .

Da  $U(q)$  zeitunabhängig ist, d.h.  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  ( $L$  ist autonom, d.h.  $\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} = 0$ ) folgt (vergleiche hierzu auch Abschnitt 4.2.3)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) &= \frac{d}{dt} \left( \dot{q} m \dot{q} - \frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) \\
 &= m \dot{q} \ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} \dot{q} \\
 &= \dot{q} \left( m \ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} \right) = 0 \\
 &\quad \text{wegen EL.-Gl. ist } m \ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}
 \end{aligned}$$

Hierbei muss man beachten, dass die partielle Ableitung von  $U$  nach der Zeit Null ist, die totale Ableitung von  $U$  nach der Zeit ist aber nicht Null ( $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  aber  $\frac{dU}{dt} \neq 0$ ). Wir haben also erhalten, dass  $E = T + U = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q)$  (Gesamtenergie) zeitlich erhalten ist. (Die Energieerhaltung gilt, wenn  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , also wenn  $L$  autonom ist.)

Die Auflösung  $\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}$  und Trennung der Variablen liefert die Zeit, die das Teilchen braucht, um von  $q_1 = q(t_1)$  nach  $q_2 = q(t_2)$  zu kommen. Es gilt

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt.$$

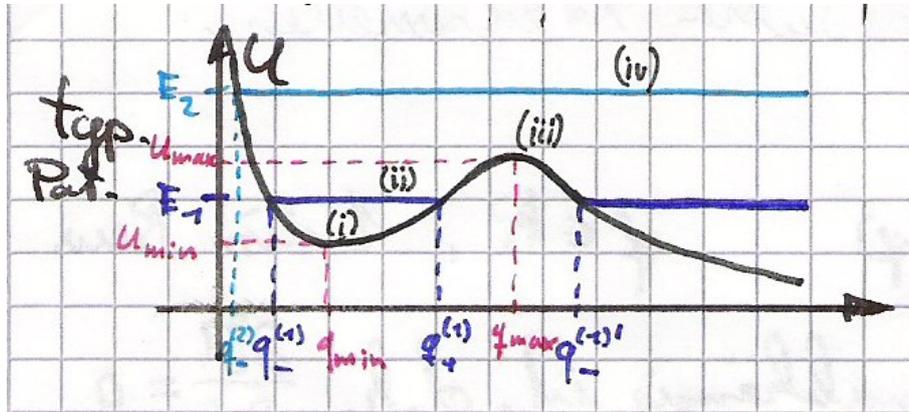
Wir führen die Variablensubstitution  $t \rightarrow q(t)$ ;  $dq = \dot{q}(t)dt$  durch und erhalten

$$t_2 - t_1 = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\dot{q}} = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}}.$$

Hierbei haben wir  $\dot{q} > 0$  gewählt, damit  $t_2 > t_1$ . Integrieren liefert nun  $t(q)$  und anschließendes Invertieren schließlich  $q(t)$ . Damit sind wir fertig.

### Diskussion der möglichen Bahnen bei einem typischen Potential

Wir wollen nun eine graphische Diskussion der qualitativ möglichen Bahntypen für „typische“ Potentiale  $U(q)$  durch Betrachtung aller möglichen Energie-Werte. Betrachte hierzu Abbildung 4.7. Da  $\frac{m}{2}t\dot{q}^2 \geq 0$ ,



**Abbildung 4.7:** Typische Potentiallandschaft mit den vier wichtigen Bahntypen zu verschiedenen Energiezuständen.

folgt Bewegung in Bereichen, wo  $U(q(t)) \leq E$ .

- (i)  $E = U_{\min}$ . Wo  $F = \frac{\partial U}{\partial q}|_{q_{\min}} = 0$ ;  $\dot{q}(t) \equiv 0$  &  $q(t) \equiv q_{\min}$  ist eine mögliche Lösung bzw. Bahn, da  $U \leq E$  und die Euler-Lagrange-Gleichung  $m\ddot{q} = F = 0$  erfüllt ist.  $q_{\min}$  heißt Gleichgewichtspunkt.
- (ii)  $U_{\min} < E < U_{\max}$  (&  $q < q_{\max}$ ). Hier ist im Allgemeinen  $\dot{q}(t) \neq 0$ , jedoch gibt es zwei Umkehrpunkte, wo  $\dot{q}(t) = 0$  auftritt; bei  $U(q_-) = E = U(q_+)$ . Wir haben also eine geschlossene Bahn, die (anharmonische) Oszillationen vollführt mit Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \int_{q_-}^{q_+} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}}.$$

Außerdem gilt  $q(t + T) = q(t)$ .

#### Bemerkung:

Im Allgemeinen hängt also  $\omega$  von der Auslenkung  $q_+ - q_-$  ab. Bei harmonischen Oszillator ist dies allerdings nicht der Fall!

- (iii)  $E = U_{\max}$  und  $F = -\frac{\partial U}{\partial q}|_{q_{\max}} = 0$ ;  $\dot{q}(t) \equiv 0$ ,  $q(t) \equiv q_{\max}$  ist eine mögliche Bahn.  $q_{\max}$  heißt also auch Gleichgewichtspunkt.
- (iv)  $E > U(q > q_-) \hat{=} U_{\max}$ : Nur ein Umkehrpunkt  $U(q_-) = E$  und das Teilchen läuft nach  $q(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$  weg.

### 4.3.2.2 Linearisierung um den Gleichgewichtspunkt

Um die Punkte  $q_{\min}$  und  $q_{\max}$  von Abschnitt 4.3.2.1 kann die Euler-Lagrange-Gleichung linearisiert werden. Im allgemeinen Fall von  $f$  Freiheitsgraden liefert dies

$$L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = L(\dot{\vec{q}}) = T(\dot{\vec{q}}) - U(\vec{q})$$

mit  $\vec{q} \in \mathbb{R}^f$ , also

$$L = \sum_{i=1}^f \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - U(\vec{q}).$$

(i) Punkt  $\vec{q}_0 \in \mathbb{R}^f$  ist ein Gleichgewichtspunkt

$$\Leftrightarrow \vec{F}(\vec{q}_0) = - \left. \frac{\partial U}{\partial \vec{q}} \right|_{\vec{q}_0} = 0,$$

es wirkt also keine Kraft. Sollte das System je bei  $\vec{q}_0$  in Ruhe sein, dann ist es für alle Zeiten in Ruhe.

**Beweis:**

Mit der Euler-Lagrange-Gleichung gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} m_i \dot{q}_i = m_i \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i = 0$$

bei  $\vec{q}_0$ . Es folgt  $\vec{q}(t_0) = \vec{q}_0$  &  $\dot{\vec{q}}(t_0) = 0$  hat die eindeutige Lösung  $\vec{q}(t) \equiv \vec{q}_0$ .

(ii) Für kleine Abweichungen  $\delta \vec{q}(t) = \vec{q}(t) - \vec{q}_0$  vom Gleichgewichtspunkt werden die Euler-Lagrange-Gleichungen zu linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (durch Taylor-Entwicklung). Die Euler-Lagrange-Gleichung wird also zu

$$m_i \ddot{\delta q}_i = m_i \delta \ddot{q}_i = F_i(q_0 + \delta \vec{q}). \quad (4.3.15)$$

Hierbei steckt die gesamte Zeitabhängigkeit in  $\delta q_i$ . Führt man eine Taylor-Entwicklung durch, so erhält man

$$F_i(q_0 + \delta \vec{q}) = \underbrace{F_i(\vec{q}_0)}_{=0} + \underbrace{\sum_{j=1}^f \left. \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{q}_0}}_{\text{konst. Koeffizient}} \delta q_j + \mathcal{O}(\delta q^2), \quad (4.3.16)$$

also ist

$$m_i \delta \ddot{q}_i = - \sum_{j=1}^f \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}_0} \delta q_j \quad (4.3.17)$$

die linearisierte Differentialgleichung mit konstanter und symmetrischer (symmetrisch: cf. Satz von Schwarz) Matrix der zweiten Ableitungen des Potentials bei  $\vec{q}_0$ .

Wenden wir uns nochmal der Potentiallandschaft aus dem Beispiel von Abschnitt 4.3.2.1 zu. Wir erhalten Parabeln für  $|\delta \vec{q}| = |\vec{q}(t) - \vec{q}_0| \rightarrow 0$  in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes (cf. Abbildung 4.8).

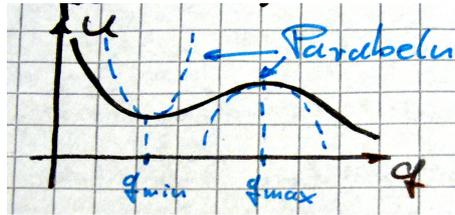


Abbildung 4.8: Typisches Potential aus Abschnitt 4.3.2.1.

Bei  $q_{\min}$ :  $U(q_{\min} + \delta q) = U_{\min} + \frac{k}{2} \delta q^2 + \mathcal{O}(\delta q^3)$  mit  $k = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_{\min}} > 0$  „Federkonstante der Rückstellkraft“.

$$\Rightarrow \delta \ddot{q} + \omega^2 \delta q = 0$$

mit Frequenz  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\left. \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_{\min}}}$  der harmonischen Schwingung und konstanter Amplitude („linear stabil“).

**Bemerkung:**

Nichtlineare Terme können zum Anwachsen der Amplitude führen. Die Schwingung wird dann „nichtlinear instabil“.

Bei  $q_{\max}$ :

$$U(q_{\max} + \delta q) = U_{\max} + \underbrace{\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_{\max}}}_{< 0, \text{ weil Max.}} \delta q^2 + \mathcal{O}(\delta q^3)$$

$$\Rightarrow \delta \ddot{q} - \alpha^2 \delta q = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\left. \frac{-1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_{\max}}} > 0$$

Dies gibt immer exponentielles Anwachsen, da eine Lösung  $\delta q \propto e^{+\alpha t}$  nur für ganz spezielle Anfangsbedingungen nicht auftritt.

(iii) Kleine Schwingungen und charakteristische Frequenzen.

In linearen Euler-Lagrange-Gleichungen (in  $\mathbb{R}^f$ ) um den Gleichgewichtspunkt  $\vec{q}_0$  führt der Ansatz

$$\delta q_i(t) = A_i e^{i\lambda t} \quad (4.3.18)$$

mit konstantem Amplitudenvektor  $\vec{A}$  auf ein System von  $f$  gekoppelten linearen algebraischen Gleichungen

$$\left[ \begin{pmatrix} -m_1 \lambda^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -m_2 \lambda^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -m_f \lambda^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_1} \right|_{\vec{q}_0} & \dots & \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_f} \right|_{\vec{q}_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_f \partial q_1} \right|_{\vec{q}_0} & \dots & \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_f \partial q_f} \right|_{\vec{q}_0} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_f \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.19)$$

welches nur nicht triviale Lösungen  $\vec{A} \neq 0$  besitzt, wenn die Determinante der Matrix [...] verschwindet, also

$$\det \left( \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}_0} - m_i \lambda^2 \delta_{ij} \right) = 0. \tag{4.3.20}$$

Es folgt, dass die  $f$  verallgemeinerten Frequenzen  $\sqrt{\lambda^2} = \omega_{(\alpha)}$  für  $\alpha = 1, \dots, f$  die Eigenwerte der Matrix  $\left( \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}_0} \right)_{ij}$  sind. Weil diese symmetrisch ist, gilt  $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ .

Ist ein  $\omega_{(\alpha)}^2 < 0$ , so ist der Gleichgewichtspunkt instabil mit exponentiell anwachsender Lösung  $\delta q(t)$ . Zu jedem  $\omega_{(\alpha)}^2$  gehört ein Eigenvektor  $\vec{A}_{(\alpha)}$ , der

$$\sum_{j=1}^f \left( \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}_0} - m_j \omega_{(\alpha)}^2 \delta_{ij} \right) A_{j(\alpha)} = 0 \tag{4.3.21}$$

erfüllt, so dass die allgemeine Lösung (mit Konstanten  $C_{(\alpha)} \in \mathbb{C}$ , welche durch Anfangsbedingungen festgelegt werden)

$$\delta \vec{q}(t) = \sum_{\alpha=1}^f \Re \left( \vec{A}_{(\alpha)} e^{i\omega_{(\alpha)} t} \cdot C_{(\alpha)} \right) \tag{4.3.22}$$

lautet. Diese ist linear stabil, falls alle  $\omega_{(\alpha)}^2 > 0$  sind.

**Bemerkung:**

Viele Systeme (Moleküle, Festkörper, Pendel, ...) führen kleine Schwingungen um eine Ruhelage aus. Aus diesem Grund ist der harmonische Oszillator so wichtig.

**4.3.2.3 Bewegung im Zentralpotential  $U(r = |\vec{r}|)$**

Ein Teilchen im Zentralpotential  $U(r)$  spürt nur radiale Kräfte

$$\vec{F} = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} U(r) = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \vec{r}} = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}, \tag{4.3.23}$$

mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  und dem Richtungsvektor  $\frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$ . Die Kraft zeigt also immer in radialer Richtung. Die dreidimensionale Bewegung kann durch Lösen einer eindimensionalen Bewegung gefunden werden.

**Beweis:**

Sei  $L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$ . Damit ist die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} m \dot{\vec{r}} = - \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r}.$$

(i) Drehimpulserhaltung (I):

Der Drehimpuls  $\vec{L}$  ist gegeben durch  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} (\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)) = \dot{\vec{r}} \times m \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \\ &\stackrel{\text{EL-Gl.}}{=} \vec{r} \times \left( - \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} \right) = 0. \end{aligned}$$

Der Drehimpuls bleibt also erhalten.

(ii) Es handelt sich um eine ebene Bewegung, weil  $\boxed{\vec{r} \cdot \vec{L} = 0} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p})$  (Die erste Gleichheit ist eine Ebenengleichung, weil  $\vec{L}$  konstant ist). Die Bewegung erfolgt in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{L}$  durch den Ursprung.

(iii) Ebene Polarkoordinaten:

Wir beschreiben das Problem fortan in Zylinderkoordinaten, wobei die  $z$ -Achse parallel zu  $\vec{L}$  steht. Die Bewegung liegt also in der  $x$ - $y$ -Ebene bei  $z(t) \equiv 0$ . Die Polarkoordinaten in der Ebene lauten dann

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cdot \cos(\varphi(t)) & r \geq 0 \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(\varphi(t)) & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Geschwindigkeit schreiben als

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{r} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi} \sin(\varphi), \\ \dot{y}(t) &= \dot{r} \sin(\varphi) + r\dot{\varphi} \cos(\varphi). \end{aligned}$$

Für die Lagrange-Dichte folgt damit durch Einsetzen

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(r) \\ &= \frac{m}{2}((\dot{r} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi} \sin(\varphi))^2 + (\dot{r} \sin(\varphi) + r\dot{\varphi} \cos(\varphi))^2) - U(r). \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Vereinfachen führt zu

$$\boxed{L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)}. \tag{4.3.25}$$

(iv) Drehimpulserhaltung (II):

Weil  $\varphi$  eine zyklische Variable ist (d.h.  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ ), folgt mit der Euler-Lagrange-Gleichung, dass

$$l := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst.} = mr^2\dot{\varphi} \tag{4.3.26}$$

zeitunabhängig ist. Es ist  $l$  die Länge des Drehimpulsvektors  $\vec{L}$ , was man sich durch explizites Einsetzen klarmachen kann, d.h.  $\vec{L} = l \cdot \hat{z}$ .

(v) Radiale Bewegungsgleichung und effektives Potential

Die verbleibende Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt} m\dot{r} = m\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\varphi}^2 r - \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Mit  $l = mr^2\dot{\varphi} = \text{konst.}$  folgt

$$m\dot{\varphi}^2 r - \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \right).$$

Also gilt

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}(r)}{\partial r}, \quad (4.3.27)$$

mit  $U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$ , dem effektiven Potential, welches einen Zentrifugalterm enthält (je kleiner der Radius wird, desto repulsiver wird die Zentrifugalkraft).

Ist das Potential  $U$  beispielsweise proportional zu  $-\frac{c}{r}$ , wobei  $c$  eine positive Konstante ist (das ist beim gravitativen und beim elektrischen Potential der Fall), dann hat das Potential die in Abbildung 4.9 skizzierte Gestalt. Jetzt ist noch die radiale Gleichung (4.3.27) zu lösen,  $r(t)$  zu bestimmen und

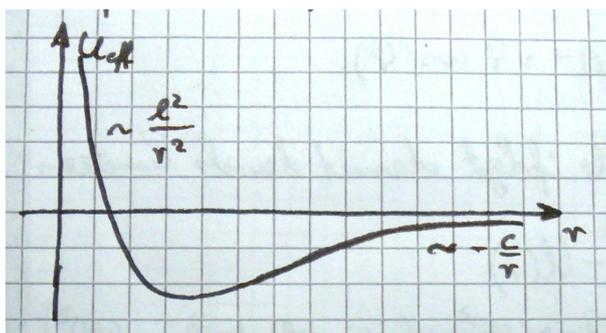


Abbildung 4.9: Effektives Potenzial, z.B. beim Kepler-Problem.

dann  $\varphi(t)$  aus (4.3.26) zu erlangen.

(vi) Energieerhaltung:

Zur Lösung von (4.3.27) bietet sich die Energieerhaltung an:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{konst.} \quad (4.3.28)$$

**Beweis:**

$$\frac{d}{dt}E = \left( m\dot{r} + \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} \right) \dot{r} \stackrel{(4.3.27)}{=} 0$$

### 4.3.3 Axiome und Grundbegriffe der Lagrange Mechanik

Die Formulierung der Mechanik nach Lagrange erfolgt mit dem Hamilton'schen Extremalprinzip für Bahnkurven zur Lagrange-dichte  $L$ .

**4.3.3.0.1 1. Axiom:** Ein mechanisches System ist eine Bahn  $\mathcal{C}$  im Konfigurationsraum  $M$  mit

$$\mathcal{C} : \{t, \vec{q}, : \vec{q} = \vec{q}(t) \text{ „glatt genug“ f\"ur } t_- \leq t \leq t_+; \vec{q} \in \mathbb{R}^f\}.$$

**Bemerkung:**

- Der Parameter  $t$  ist die Zeit.

- Falls  $f$  Koordinate ausgewählt werden,  $q_1, \dots, q_f$  mit denen jeder Punkt von  $M$  dargestellt werden kann, heißen  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_f)$  „generalisierte Koordinaten“.
- Die Dimension  $f$  von  $M$  heißt Zahl der Freiheitsgrade. ( $M$  heißt auch Lage- oder Positionenraum).
- Das zugehörige  $\dot{q}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, f\}$  heißt generalisierte Geschwindigkeit.

**4.3.3.0.2 2. Axiom:** Die Dynamik wird bestimmt durch die Angabe einer Lagrange-Dichte  $L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$  (unter gewissen Regularitätsbedingungen) so, dass die Bahnen  $\mathcal{C}$  des Systems Extremalen des Hamilton'schen Wirkungsfunktional

$$S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$$

sind.

#### Bemerkung:

- Man nennt dieses Axiom auch „Prinzip kleinster Wirkung“.
- Die Extremalen findet man über die Euler-Lagrange-Gleichung.
- Unsere „Euler-Lagrange-Gleichung“ wird in manchen Büchern, besonders in solchen für Ingenieure, „Lagrange-Gleichung zweiter Art“ genannt. Sie lautet

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

- Die  $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, f\}$  heißen generalisierte bzw. kanonische Impulse. Bei magnetischen Feldern beispielsweise stimmen kinetischer und kanonischer Impuls nicht überein:

$$L = \frac{m}{2} v^2 + q\vec{v} \cdot \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A} \neq m \cdot \vec{v}, \quad \text{für } i \in \{1, \dots, f\}.$$

- $q_i$  und  $p_i$  nennt man zueinander konjugierte Variablen.

Am Ende diese Unterabschnittes seien wichtige Sachverhalte noch einmal zusammengefasst.

- **Zyklische Variablen**

Eine Variable  $q_i$  heißt zyklisch, falls gilt  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ . Es folgt, dass der zugehörige kanonische Impuls erhalten bleibt, also eine Erhaltungsgröße ist,  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.}$

- **Energieerhaltung**

Hängt  $L$  nicht explizit von der Zeit  $t$  ab, d.h.  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  oder  $L = L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t))$ , dann ist

$$\sum_{i=1}^f \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = E = \text{konst.}$$

eine Erhaltungsgröße. Oft ist  $E$  die Gesamtenergie des Systems. (Beweis durch Einsetzen)

### 4.3.4 Zwangsbedingungen

#### 4.3.4.1 Holonome Zwangsbedingungen

**Beispiel:** Wir betrachten ein Stangenpendel, wie in Abbildung 4.10 dargestellt.

(i) **Starres (ebenes) Pendel**

Die Behauptung, der Massepunkt hängt an einer Stange der festen Länge  $l$  ist eine Zwangsbedin-

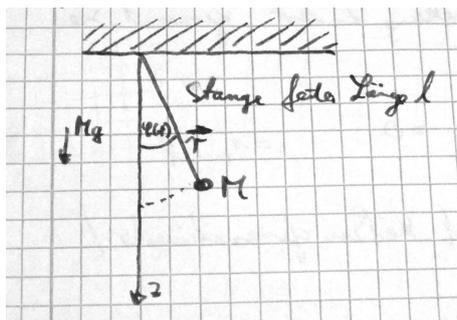


Abbildung 4.10: Starres Pendel

gung.  $|\vec{r}(t)| = l$  ist eine Modellierung des Festkörpers Stange.

(ii) **Zwei starr gekoppelte Pendel**

Seien nun zwei Pendel durch eine Feder mit Federkonstante  $\alpha$  gekoppelt (cf. Abbildung 4.11),

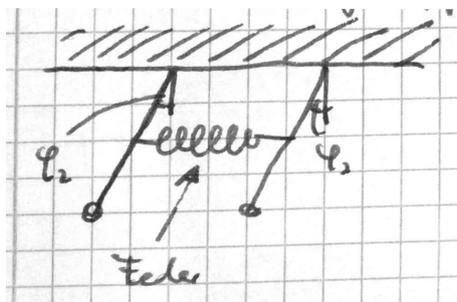


Abbildung 4.11: Zwei starre, gekoppelte Pendel

sodass die Lagrange-Funktion lautet:

$$L = L_1 + L_2 + \frac{\alpha}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

Im Grenzfall  $\alpha \rightarrow \infty$ : Starre Kopplung wird modelliert durch die Zwangsbedingung  $\varphi_1 = \varphi_2$ . (siehe Aufgabe 3)

**Bemerkung:**

Nur selten (hier in (ii)) verstehen wir mechanische Geräte (Stangen, Federn, Scharniere etc.), welche Zwangsbedingungen realisieren. Ziel: Allgemein wollen wir jedoch technische Geräte einfach modellieren. Das machen wir durch Zwangsbedingungen.

**Definition:**

Sei ein mechanisches System nach Lagrange gegeben im  $f$ -dimensionalen Konfigurationsraum durch die Lagrange-Dichte

$$l = l(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t) = l(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

Das System von  $n$  Gleichungen

$$F_1(q_1(t), \dots, q_f(t), t) = 0$$

$$\vdots$$

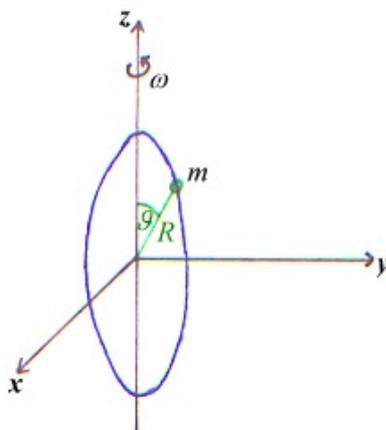
$$F_n(q_1(t), \dots, q_f(t), t) = 0$$

kurz  $F_i(\vec{q}(t), t) = 0$  für  $1 \leq i \leq n$  ( $n < f$ ) gibt  $n$  holonome Zwangsbedingungen.

Als Reaktion auf diese Zwangsbedingungen wirkt das System mit Zwangskräften  $\vec{Z}$  nach außen, d.h. auf die mechanischen Geräte, die die Zwangsbedingungen erzwingen.

(iii) **Perle im Schwerfeld auf rotierendem Draht**

Wir betrachten nun eine Perle, welche auf einem kreisförmigen Draht (mit Radius  $R$ ) „aufgefädelt“ ist. Dieser kreisförmige Draht dreht sich um die vertikale Rotationsachse, die durch seinen Mittelpunkt verläuft mit fester Kreisfrequenz  $\omega$  (cf. Abbildung 4.12). Die Perle (Massepunkt) gleitet



**Abbildung 4.12:** Eine Perle, die auf einen kreisförmigen Draht aufgefädelt ist, der sich um eine Achse dreht, die durch seinen Mittelpunkt geht.

reibungsfrei auf dem Kreisring und spürt die Schwerkraft. Diese Bewegung ist durch Zwangsbedingungen eingeschränkt. In kartesischen Koordinaten lauten diese

$$\begin{aligned} F_1(\vec{r}, t) &= x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \\ F_2(\vec{r}, t) &= x \sin(\omega t) - y \cos(\omega t) = 0 \end{aligned}$$

In Polarkoordinaten, d.h.  $x(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \sin(\vartheta(t))$ ,  $y(t) = r(t) \sin(\varphi(t)) \sin(\vartheta(t))$ ,  $z(t) = r(t) \cos(\vartheta(t))$  mit  $r > 0$  und  $-\pi < \varphi < \pi$  und  $0 < \vartheta < \pi$  lauten die Zwangsbedingungen

$$F_1(t, \varphi, \vartheta, t) = r(t) - R = 0, \quad (4.3.29)$$

$$F_2(r, \varphi, \vartheta, t) = \varphi(t) - \omega t = 0. \quad (4.3.30)$$

Hier lautet die Lagrange-Dichte in kartesischen Koordinaten

$$l = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

und in Polarkoordinaten

$$l = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) - mgr \cos(\vartheta). \quad (4.3.31)$$

Hierbei wurde  $\dot{\vec{r}}$  in Polarkoordinaten ausgedrückt. Aus den oben genannten Transformationsvorschriften für die Polarkoordinaten folgt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) + r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \dot{\vartheta} - r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \dot{\varphi}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \dot{\vartheta} + r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \dot{\varphi}, \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos(\vartheta) - r \sin(\vartheta) \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergeben sich (4.3.29), (4.3.30) und (4.3.31).

### Bemerkung:

- Die Zwangsbedingungen schränken die Koordinaten bzw. Bahnen der Teilchen ein.
- Zeitunabhängige holonome Zwangsbedingungen  $F(\vec{r}, t) = F(\vec{r})$  heißen *skleronom*. Zeitabhängige holonome Zwangsbedingungen heißen *rheonom*.
- Nichtholonome Zwangsbedingungen enthalten die Geschwindigkeit, so dass die Gleichungen  $F_i(\vec{r}, t) = 0$  nicht aufgestellt werden können (z.B. bei Roll- bzw. Gleitreibung). Im IK3 werden aber nur holonome Zwangsbedingungen betrachtet.
- $L = T - U = T(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) - U(r, \vartheta)$  mit ortsabhängiger kinetischer Energie  $T$ .

#### 4.3.4.2 Lagrange-System mit Zwangsbedingungen

##### Satz:

- (i) Ein mechanisches System mit  $f$  Freiheitsgraden  $l(\vec{q}_1(t), \dots, \vec{q}_f(t), \dot{\vec{q}}_1(t), \dots, \dot{\vec{q}}_f(t), t)$  mit  $\vec{q} \in \mathbb{R}^f$  wird durch  $n$  funktional unabhängige (dazu später mehr) holonome Zwangsbedingungen

$$F_i(\vec{q}(t), t) = 0, \quad 1 \leq i \leq n < f \quad (4.3.32)$$

auf den  $F = f - n$  dimensionalen Konfigurationsraum  $M$  gezwungen, der beschrieben sei durch  $F$  lokale Koordinaten  $(Q_1, \dots, Q_F) = \vec{Q}$ .

Wenn die alten Koordinaten  $\vec{q}$  durch die neuen Koordinaten  $\vec{Q}$  ausgedrückt werden können, d.h. es gibt Funktionen  $g_i$  mit

$$q_i = g_i(Q_1, \dots, Q_F, t) = g_i(\vec{Q}, t) \quad 1 \leq i \leq f,$$

so lautet die neue Lagrange-Dichte  $L$ , die das System in  $M$  vollständig beschreibt

$$\begin{aligned} L(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}, t) &= L(Q_1(t), \dots, Q_F(t), \dot{Q}_1(t), \dots, \dot{Q}_F(t), t) \\ &= l(g_1, \dots, g_l, \dot{g}_1, \dots, \dot{g}_l, t) \\ &= l(\vec{g}(\vec{Q}(t), t), \frac{d}{dt}\vec{g}(\vec{Q}(t), t), t). \end{aligned}$$

Hierbei ist die  $i$ -te Koordinate in  $l$

$$q_i = g_i(\vec{Q}(t), t)$$

und die  $i$ -te Geschwindigkeit ist

$$\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}g_i(\vec{Q}(t), t) = \frac{\partial g_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^f \frac{\partial g_i}{\partial q_j} \dot{Q}_j(t).$$

- (ii) Ist die Bahn  $Q(t)$  gefunden, so folgen die  $\vec{q}(t) = \vec{g}(\vec{Q}(t), t)$  durch Einsetzen und die Zwangskräfte lauten

$$Z_i = \left. \frac{\partial l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \right|_{\vec{q}=\vec{g}(\vec{Q}, t)}.$$

Es gilt im Allgemeinen  $Z_i \neq 0$ .

### Beweis

- (i) Erst in Abschnitt ??.
- (ii) Ist nur eine Definition der Zwangskraft.

### Bemerkung:

Dieser Satz liefert ein konstruktives Lösungsverfahren.

Wir wenden uns nun wieder dem Beispiel (iii) (Perle auf einem rotierendem Kreisring) zu und wenden das o.g. konstruktive Lösungsverfahren an.

- (1) Formuliere  $l$  in den einfachst möglichen Koordinaten, z.B. in kartesischen.
- (2) Berücksichtige die Zwangsbedingungen durch Einführung geeigneter krummliniger Koordinaten (hier Polarkoordinaten), so dass der neuen Konfigurationsraum  $M$  lautet

$$M : \{Q(t) = \vartheta(t); 0 \leq Q \leq \pi\}.$$

$\vartheta$  ist der Winkel zur  $z$ -Achse. Die Koordinatentransformation zu den ursprünglichen Koordinaten lautet dann

$$\begin{aligned} x(t) &= g_x = R \cos(\omega t) \sin(Q(t)), \\ y(t) &= g_y = R \sin(\omega t) \sin(Q(t)), \\ z(t) &= g_z = R \cos(Q(t)), \end{aligned}$$

wobei die Zwangsbedingungen erfüllt sind:  $F_1 = F_2 = 0$  (weil  $r(t) = R, \varphi(t) = \omega t$ ).

(3) Stelle  $L$  auf durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} L(Q(t), \dot{Q}(t), t) &= l(x(t) = R \cos(\omega t) \sin(Q(t)), \dots, \\ &\quad \dot{x}(t) = -R\omega \sin(\omega t) \sin(Q(t)) + R\dot{Q}(t) \cos(\omega t) \cos(Q(t)), \dots) \\ &= \frac{m}{2} (R^2 \omega^2 \sin^2(Q) + R^2 \dot{Q}^2) - mgR \cos(Q) \end{aligned}$$

Da  $L = T(\dot{Q}) - U(Q)$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} T(\dot{Q}) &= \frac{m}{2} R^2 \dot{Q}^2, \\ U(Q) &= mgR \left( \cos(Q) - \frac{R\omega^2}{2g} \sin^2(Q) \right). \end{aligned}$$

(4) Löse  $L(Q, \dot{Q})$  beispielsweise durch die Euler-Lagrange-Gleichung nach  $Q(t)$  auf. Hier gilt  $f = 3$ ,  $n = 2$  und somit  $F = f - n = 1$ .

(5) Löse  $L(Q, \dot{Q}, t)$  durch den Lagrange-Hamilton-Formalismus, um  $Q(t)$  aus den Anfangsbedingungen  $Q(t_0), \dot{Q}(t_0)$  zu bestimmen.

(6) Falls von Interesse, bestimme die ursprüngliche Koordinaten  $(x, y, z)$  oder  $(r, \varphi, \vartheta)$  aus  $Q(t)$  um die Zwangskraft zu bestimmen. Hier z.B.  $Z_r$  (radiale Zwangskraft).

$$\begin{aligned} Z_r &= \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial l}{\partial r} \right|_{\substack{r=R; \\ \varphi=\omega t; \\ \vartheta=Q(t)}} = m \left( \ddot{r} - \left( \dot{Q}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(Q) \right) r + g \cos(Q) \right) \Big|_{\substack{r=R; \\ \varphi=\omega t; \\ \vartheta=Q(t)}} \\ &= mR \left( \underbrace{\dot{Q}^2}_{(i)} + \underbrace{\omega^2 \sin^2(Q)}_{(ii)} + \underbrace{mg \cos(Q)}_{(iii)} \right) \end{aligned}$$

(i): Zentrifugalkraft für Bewegung entlang des Rings.

(ii): Radiale Komponente ( $\sin(Q)$ ) der Zentrifugalkraft bei Rotation um die  $\hat{z}$ -Achse im Abstand  $R \sin(Q)$ .

(iii): Radiale Komponente der Gewichtskraft

#### Bemerkung:

- Genau diese Zentralkraft muss der Ring aushalten.
- Behandlung von Zwangsbedingungen nach Lagrange einfacher, als nach Newton.
- Alternatives Lösungsverfahren zur Behandlung von (nicht-homonomen) Zwangsbedingungen verwendet Lagrange-Multiplikatoren. (cf. in Lehrbüchern, wie etwa Nolting, Band 2)

## 4.4 Symmetrien und Erhaltungssätze

In diesem Abschnitt werden wir Einsichten in die Mechanik aufgrund der Formulierung als Variationsprinzip erhalten.

### 4.4.1 Bahndeterminismus

Nach Newton gilt: Anfangsort und -geschwindigkeit legen die Bahn eines Körpers eindeutig fest. Gilt dies auch nach Lagrange?

Wir betrachten die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}}_{\text{Legendre-Matrix } L_{ij}} \ddot{q}_j + \dots$$

Wenn  $L_{ij}$  invertierbar ist, sind die Euler-Gleichungen äquivalent zu  $f$  expliziten Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{q}_i + \sum_j L_{ij}^{-1} \left[ \sum_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] = 0,$$

welche nach Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen eindeutige Lösungen zu  $\vec{q}(t_0) = \vec{q}_0$  und  $\dot{\vec{q}}(t_0) = \vec{v}_0$  liefern. Es handelt sich also um deterministische Bewegungen.

**Bemerkung:**

Ein Gegenbeispiel, in dem  $L_{ij}$  nicht invertierbar ist und das Variationsproblem nicht eindeutig lösbar ist, ist die kürzeste Bahn in einer Ebene mit  $L = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ . Hierbei gilt

$$L_{ij} = \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \dot{y}^2 & -\dot{x}\dot{y} \\ -\dot{y}\dot{x} & \dot{x}^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \det(L_{ij}) = 0,$$

weil die Bahn mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchführbar ist.

### 4.4.2 Kovarianz und Koordinatentransformationen

#### 4.4.2.1 Forminvarianz

Kovariant oder forminvariant heißen Bewegungsgleichungen, die in verschiedenen Koordinatensystemen die selbe funktionale Form annehmen.

Idee: Die Physik soll unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sein zur Beschreibung einer Bewegung.

**Bemerkung:**

Die Newton'schen Mechanik mit

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$$

ist nur forminvariant unter Galilei-Transformationen, ansonsten treten zusätzliche Kräfte (Scheinkräfte bzw. Trägheitskräfte) auf.

**Satz:**

Die Eigenschaft einer Kurve, eine Extremale des Wirkungsfunktional zur Lagrange-Dichte  $L$  zu sein, ist unabhängig von der Koordinatenwahl.

**Beweis:** klar. (alternativ cf. Abschnitt 4.4.2.3)

**Bemerkung:**

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind kovariant oder forminvariant (im Allgemeinen nicht invariant!) unter beliebigen kompatiblen Koordinatentransformationen. Dies ist der Vorteil der analytischen Mechanik nach Lagrange.

**4.4.2.2 Koordinatentransformationen**

**Definition:** (kompatible Koordinatentransformation)

Eine Abbildung  $\vec{q} \rightarrow (\vec{Q}, \vec{\bar{q}})$  mit  $Q_i = G_i(\vec{q}, t)$  für  $1 \leq i \leq F$  und  $\bar{q}_i = G_i(\vec{q}, t)$  für  $F+1 \leq i \leq f$ , wobei jeweils  $\vec{q} \in \mathbb{R}^f$ ,  $Q \in \mathbb{R}^F$  und  $\vec{\bar{q}} \in \mathbb{R}^{f-F}$  zwischen zwei Koordinatensystemen in der Nähe eines Punktes  $\vec{q}_0$  von  $M$  heißt kompatible Koordinatentransformation, wenn sie lokal auflösbar/umkehrbar ist nach

$$q_i = g_i(\vec{Q}, \vec{\bar{q}}, t) \quad \text{für } 1 \leq i \leq f.$$

**Bemerkung:**

- Die Koordinatentransformation darf von  $t$  beliebig abhängen.
- Häufige Abbildungen sind  $Q_i = Q_i(\vec{q}, t)$ .
- Eine Koordinatentransformation heißt auch Punkttransformation, da sie nur in einer offenen Umgebung von  $\vec{q}_0$  invertierbar sein muss.

Der Satz über punktimplizite Funktionen besagt, dass eine Koordinatentransformation bei  $\vec{q}_0$  lokal umkehrbar ist, wenn sie vollständig differenzierbar ist, d.h. wenn die Jacobi-Matrix bei  $\vec{q}_0$  nicht verschwindet:

$$\begin{aligned} J(\vec{q}_0) &= \det \left( \left. \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{q}_0} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial q_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_f}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial G_f}{\partial q_f} \end{pmatrix} \neq 0, \pm\infty. \end{aligned}$$

**Beispiel:** ebene Polarkoordinaten

Es gilt  $x = r \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\varphi)$ . Damit haben wir

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{vmatrix} = r.$$

Damit ist die Koordinatentransformation kompatibel für  $0 \neq r$ ,  $\infty \neq r$ .

**Satz:** (Satz über implizite Funktionen)

Die  $n = f - F$  Gleichungen

$$\bar{q}_i = G_i(\vec{q}, t), \quad F+1 \leq i \leq f$$

mit  $\vec{\bar{q}} \in \mathbb{R}^f$  können lokal bei  $\vec{q}$  aufgelöst werden nach den  $n$  Koordinaten

$$q_i = g_i(q_1, \dots, q_F, \bar{q}_{F+1}, \dots, \bar{q}_f, t) \quad F+1 \leq i \leq f,$$

wenn

$$J^{(n)}(\vec{q}) = \det \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \Big|_{F+1 \leq i, j \leq f} \right) \neq 0.$$

**Bemerkung:**

- Der Fall  $F = 0$  von oben ist enthalten.
- Der Beweis wird in Analysis geführt.

**Beispiel:**

- $n = f = 1$ : Betrachte Abbildung 4.13. Diese Koordinatentransformation ist überall invertierbar, wo

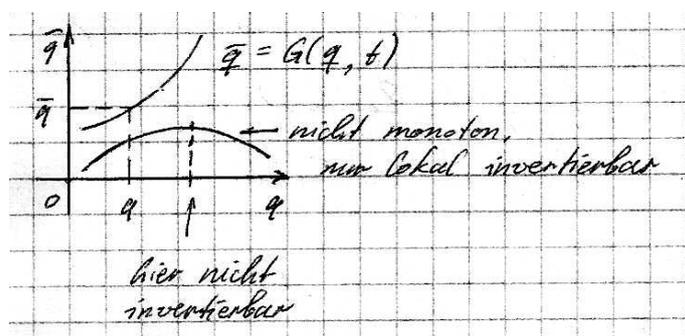


Abbildung 4.13: Beispiel für eine nicht global invertierbare Koordinatentransformation.

$$J(q_i) = \frac{\partial G(q, t)}{\partial q} \neq 0.$$

- $f = 2, n = F = 1$ : Gegeben:  $\bar{q} = G(q, Q)$ . Eine häufige Abkürzung ist  $\bar{q} = \bar{q}(q, Q)$ . Die Koordinatentransformation ist bei  $q_0$  nach  $q = g(Q, \bar{q})$  lokal auflösbar, wenn  $\frac{\partial G}{\partial q} \Big|_{q_0} \neq 0$ . Dann kann man finden  $G(g(Q; \bar{q}), Q) = \bar{q}$ .

**Bemerkung:**

Es lassen sich diese Folgerungen ziehen:

$$\frac{d}{dQ} G = 0.$$

Weil  $\bar{q}$  von  $Q$  unabhängig ist, gilt auch

$$\frac{d}{dQ} G = \frac{\partial G(q, Q)}{\partial q} \frac{\partial g(Q, \bar{q})}{\partial Q} + \frac{\partial G(q, Q)}{\partial Q}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial g(Q, \bar{q})}{\partial Q} = - \frac{\partial G(q, Q)}{\partial Q} / \frac{\partial G(q, Q)}{\partial q}, \tag{4.4.1}$$

weil

$$1 = \frac{d\bar{q}}{d\bar{q}} = \frac{d}{d\bar{q}} G(q(Q; \bar{q}), Q) = \frac{\partial G(q, Q)}{\partial q} \frac{\partial q(Q; \bar{q})}{\partial \bar{q}}. \quad (4.4.2)$$

Aus (4.4.1) und (4.4.2) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(Q, \bar{q})}{\partial Q} &= - \frac{\partial G(q, Q)}{\partial Q} \frac{\partial q(Q; \bar{q})}{\partial \bar{q}} \\ &= - \frac{\partial \bar{q}(q, Q)}{\partial \partial Q} \frac{\partial q(Q; \bar{q})}{\partial \bar{q}}. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

**Bemerkung:**

Physiker rechnen dies folgendermaßen (hier  $\bar{q} \rightarrow z$ ,  $q \rightarrow y$ ,  $Q \rightarrow x$ ):

$$dz = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} dy \quad (4.4.4)$$

Bei  $z = \text{konst.}$  gilt für das totale Differential  $dz = 0$ , also

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{z=\text{konst.}} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} / \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}. \quad (4.4.5)$$

Aus (4.4.4) und (4.4.5) folgt dann für  $x = \text{konst.}$  und somit  $dx = 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dz} \right|_{x=\text{konst.}} &= \frac{\partial y(x, z)}{\partial x} / \frac{\partial x(x, y)}{\partial y} \\ \Rightarrow \frac{\partial y(x, z)}{\partial x} &= - \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \frac{\partial y(x, z)}{\partial z}. \end{aligned}$$

#### 4.4.2.3 Kovarianz / Forminvarianz der Euler-Lagrange-Gleichung

Hier wird nun der Beweis des Satzes aus Abschnitt 4.4.2.1 geführt. Behauptet wird, dass für  $1 \leq j \leq f$  aus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} = 0$$

folgt, dass gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$$

(die selbe Bahn), wenn eine kompatible Koordinatentransformation  $\vec{q} = g(\vec{Q}, t)$  existiert, was eingesetzt  $L(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}, t) = l(\vec{g}(\vec{Q}, t), \frac{d}{dt} \vec{g}(\vec{Q}, t), t)$  ergibt.

**Nebenbemerkung:**

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \quad (4.4.6)$$

Da  $\dot{Q}_j$  nur explizit auftritt, gilt

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = J_{ij}.$$

Das ist die Jakobi-Matrix. Damit gilt nun

$$\frac{\partial L}{\partial Q_j} = \sum_i \frac{\partial l}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} = \sum_i J_{ij} \frac{\partial l}{\partial q_i} + \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial Q_j} \frac{d}{dt} q_i$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} \stackrel{(4.4.6)}{=} \frac{d}{dt} \sum_i J_{ij} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i J_{ij} \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

Es folgt daraus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = \sum_i J_{ij} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} \right) + \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial}{\partial Q_j} \frac{d}{dt} q_i \right)}_{= 0, \text{ weil die 2. Abl. vertauschen}} \quad (4.4.7)$$

Die Gültigkeit der Euler-Lagrange-Gleichung mit  $L$  und  $\vec{Q}$  folgt aus der Euler-Lagrange-Gleichung mit  $l$  und  $\vec{q}$ , wenn  $\det(J) \neq 0$ .

#### 4.4.2.4 Behandlung holonomer Zwangsbedingungen

Die  $n$  Gleichungen

$$F_i(\vec{q}, t) = 0 \quad \text{mit } 1 \leq i \leq n < f$$

(wobei  $\vec{q} \in \mathbb{R}^f$ ) führen zu  $n$  „funktional unabhängigen Zwangsbedingungen“, wenn die  $n \times f$ -Matrix  $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}$  Rang  $n$  hat (d.h. eine  $n \times n$ -Untermatrix invertierbar ist). Betrachte zu Koordinaten bei Zwangsbedingungen auch Abbildung 4.14 und 4.15.

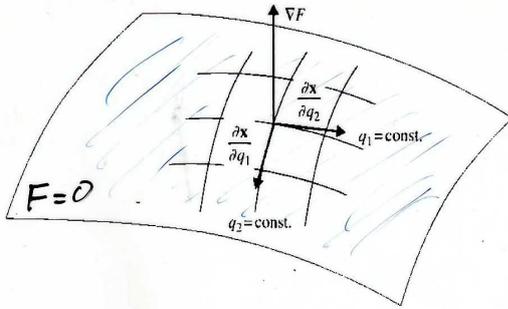


Abbildung 4.14:  $f(\vec{x}) = 0$ ,  $x_i = g_i(q_1, q_2)$ ,  $i = 1, 2, 3$

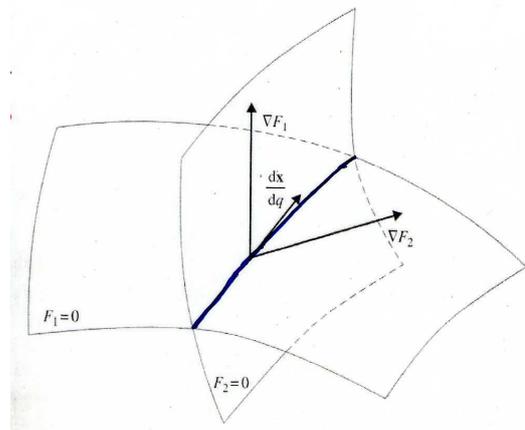


Abbildung 4.15: Unter Zwangsbedingungen eingeschränkter Konfigurationsraum.  $F_1(\vec{x}) = 0$ ,  $F_2(\vec{x}) = 0$ ,  $x_i = g_i(\vec{q})$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

#### Bemerkung:

Als Koordinatentransformation interpretierbar mit

$$\bar{q}_{F+i} = G_{F+i}(\vec{q}, t) = F_i(\vec{q}, t) \equiv 0 \tag{4.4.8}$$

für  $i = 1, \dots, n = f - F$ . Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass weitere  $F$  Funktionen  $F_i$  existieren, so dass

$$Q_i = G_i(\vec{q}, t) \quad \text{für } 1 \leq i \leq F, \tag{4.4.9}$$

sowie, dass (4.4.8) und (4.4.9) eine kompatible Koordinatentransformation sind (d.h. die  $f \times f$ -Jakobimatrix hat  $\det(J) \neq 0, \pm\infty$ ).

Nach Abschnitt 4.4.2.3 liefert das Variationsprinzip mit  $L(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}, t)$  die Bahnen, bei denen Koordinaten  $\vec{Q}$  variiert wurden, aber  $\vec{q} \equiv 0$  festgehalten wurde: Die Variation jeder Wirkung  $S$  lautet

$$\frac{dS}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\omega} = \int_{t_-}^{t_+} dt \sum_{i=1}^F \left[ \frac{\partial L}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right] \Big|_{\text{bei } \vec{q} \equiv 0} S Q_i. \tag{4.4.10}$$

Nur diejenigen Bahnen werden gefunden, die  $S$  extremal machen durch Variation  $Q_i(t) + \varepsilon \delta Q_i(t)$  für  $i = 1, \dots, F$  und Zwangsbedingungen  $\bar{q}_i = F_i(\vec{q}, t) = 0$ . Es gilt

$$\frac{\partial l}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{q=\vec{G}(\vec{Q}, t)} \neq 0$$

im Allgemeinen; diese Gleichung definiert die Zwangskräfte  $Z_i$ .

**Bemerkung:**

- Die ist eine Idealisierung für Zwangsbedingungen.
- Zur Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung benötigt man (nur) geeignete Koordinaten (mit  $\det(J) \neq 0, \pm\infty$ ).

**4.4.3 Eichinvarianz**

**Satz:**

Mit einer beliebigen Funktion  $\chi = \chi(\vec{q}, t)$  (hängt nicht von der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{q}}$  ab) ergeben  $L$  und  $\hat{L} = L + \frac{d}{dt} \chi(\vec{q}(t), t)$  die selben extremalen Bahnen.

**Beweis:**

Der Wert der Wirkung stimmt bei Variation der Bahn in beiden Fällen bis auf eine Konstante überein:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \int_{t_-}^{t_+} dt = \int_{t_-}^{t_+} dt L + \int_{t_-}^{t_+} dt \frac{d}{dt} \chi(\vec{q}(t), t) \\ &= S + \underbrace{\chi(\vec{q}(t_+), t_+) - \chi(\vec{q}(t_-), t_-)} \end{aligned}$$

Konstante, da alle Bahnen durch die Endpunkte  $\vec{q}_{\pm} = \vec{q}(t_{\pm})$  gehen müssen; beeinflusst nicht die EL-Gl.

**Bemerkung:**

Bei Eichtransformation der elektromagnetischen Potentiale  $\hat{\varphi} = \varphi + \dot{\chi}$  und  $\hat{\vec{A}} = \vec{A} - \nabla \chi$  galt  $\hat{L} = L + q \frac{d}{dt} \chi$  (hier ist  $q$  die Ladung!), was also die mechanischen Bahnen gleich lässt.

#### 4.4.4 Noether Theorem

„Zu jeder kontinuierlichen *Symmetrie* eines physikalischen Systems gehört eine *Erhaltungsgröße*.“  
Symmetrie von  $L \rightarrow$  Erhaltungsgröße

##### 4.4.4.1 Erinnerung: Autonomes System (cf. Abschnitt 4.3.3)

Ein System ist autonom genau dann, wenn  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , d.h.  $L$  nicht explizit von der Zeit abhängt. Dann ist

$$H = \dot{\vec{q}} \cdot \vec{p} - L = \dot{\vec{q}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - L = \text{konst.}$$

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  bedeutet, dass das System zeitlich invariant ist. Eine Bewegung, die bei  $t_0$  oder bei  $\hat{t}_0 = t_0 + \Delta t_0$  mit den selben Anfangsbedingungen  $\vec{q}_0$  und  $\dot{\vec{q}}_0$  startet, ist bis auf eine Verschiebung der Zeit um  $\Delta t_0$  identisch.

##### Bemerkung:

Im Fall rheonomer Zwangsbedingungen kann  $H$  von der totalen Energie abweichen (cf. Abschnitt 4.3.4).  
Beispiel: Perle auf dem Ring:  $E = T + U$  und  $\frac{dE}{dt} = -\omega z \varphi = -mR^2\omega \sin^2(Q)\dot{Q}$ . Die Zwangskraft leistet also Arbeit.

##### 4.4.4.2 Erinnerung: Zyklische Variablen (cf. Abschnitt 4.3.3)

Zur zyklischen Variable  $q_i$ , die also in  $L$  nicht auftritt, d.h.  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , gehört eine Erhaltungsgröße, der zugehörige kanonische Impuls  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.}$

##### Beispiel:

Sei  $L = \bar{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x)$ . Die potentielle Energie  $U$  hängt nicht von  $y$  ab (cf. Abbildung 4.16). Das Potential  $U$  (und damit  $L$ ) ist invariant („symmetrisch“) unter Verschiebung entlang der  $y$ -Achse, d.h. unter der Verschiebung  $y \mapsto y' + a$  gilt  $L(x, y' - a, \dot{x}, \dot{y}) = L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ .  $L$  ändert sich nicht (im Unterschied zur Kovarianz, ist also „invariant“). Dann folgt  $m\dot{y} = py = \text{konst.}$

Im Unterschied dazu: Verschiebung entlang der  $x$ -Achse. Hier hat man die Transformation  $x' = x + b$ ;

$$L' = L(x = x' - b, y, \dot{x}', \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) - \underbrace{U(x' - b)}_{\neq U(x')}$$

Dieses  $L$  ist nicht invariant unter Verschiebung entlang der  $x$ -Achse. Trotzdem sind die Euler-Lagrange-Gleichungen natürlich kovariant, „die Euler-Lagrange-Gleichungen mit  $x$  und mit  $x'$  geben die selben Bahnen“.

Noethers Idee: Kontinuierliche Symmetrie ( $L$  invariant)  $\rightarrow$  Erhaltungsgröße.

##### 4.4.4.3 Noethers Satz (Emmy Noether 1918)

Betrachte die Abbildung  $h^{(\alpha)}$  des Konfigurationsraums  $M$  („Verschiebung“) mit  $h^{(\alpha)} : M \rightarrow M, q_i \mapsto \hat{q}_i = h^{(\alpha)}(q_i, t)$  für  $i = 1, \dots, f$ , die stetig nach  $\alpha$  differenzierbar und invertierbar ist, d.h.  $q_i = \hat{h}^{(\alpha)}(\hat{q}_i, t)$  für  $1 \leq i \leq f$ , und bei  $\alpha = 0$  der identischen Abbildung entspricht, d.h.  $\hat{q}_i = h_i^{(\alpha=0)}(q_i, t) = q_i$  (für

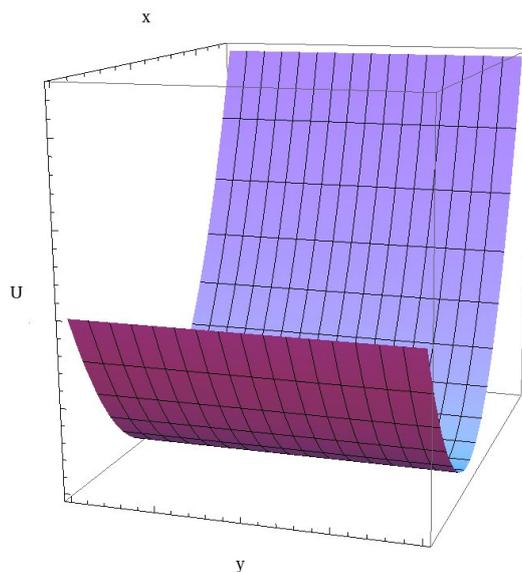


Abbildung 4.16: Das Potential  $U$  ist invariant gegen Verschiebungen auf der  $y$ -Achse.

$i = 1, \dots, f$ ), Wenn die Lagrange-Dichte  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$  invariant bleibt unter der Verschiebung bis auf eine Eichtransformation, d.h.

$$\begin{aligned} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) &= L(\hat{h}^{(\alpha)}(\hat{q}, t), \frac{d}{dt}\hat{h}^{(\alpha)}(\hat{q}, t), t) \\ &= \hat{L}(\hat{q}, \dot{\hat{q}}, t). \end{aligned}$$

Dies ist nur die Definition von  $\hat{L}$ . Gilt

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\hat{q}, \dot{\hat{q}}, t) + \frac{d}{dt}\chi(\hat{q}, t, \alpha) \quad (4.4.11)$$

(dies ist die Bedingung des Noether'schen Satzes (!), sie besagt, dass  $L$  invariant ist, sich unter Verschiebung nicht ändert), dann ist  $J$  erhalten, wobei

$$\begin{aligned} J(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \hat{h}^{(\alpha)}(q, t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial \chi(\vec{q}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \left( \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

mit

$$\boxed{\frac{d}{dt}J(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = 0}.$$

**Bemerkung:**

Dies darf nicht mit Kovarianz verwechselt werden. Bei einer Koordinatentransformation von  $\vec{q}$  zu  $\hat{\vec{q}}$  ändert

sich  $L$  zu  $\hat{L}$ , dieser Funktionen sind im Allgemeinen unterschiedlich. Bei Noether gilt mehr.

Bsp.:  $L = T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ ;  $\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Bei Transformation in Polarkoordinaten gilt  $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \neq \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2)$ . (Wären die Ausdrücke gleich, könnte man Noether anwenden.)

**Beweis:**

Weil  $\alpha$  in  $L$  nicht auftaucht gilt

$$0 = \frac{d}{d\alpha} L(\hat{q}, \dot{\hat{q}}, t) \stackrel{(4.4.11)}{=} \frac{d}{d\alpha} \left[ \hat{L}(\hat{q}, \dot{\hat{q}}, t, \alpha) - \frac{d}{dt} \chi(\hat{q}, t, \alpha) \right].$$

Hierbei verwendet man die Definition von  $\hat{L}$  aus  $L$  durch einsetzen. Wenn  $\hat{q}$  fest ist, wird  $\frac{d}{d\alpha}$  zu  $\frac{\partial}{\partial\alpha}$  und es folgt

$$0 = \sum_i \left( \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{(*)} \frac{\partial \hat{h}_i^{(\alpha)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \hat{h}_i^{(\alpha)}}_{(**)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \chi(\hat{q}, t, \alpha)}_{(***)} \right)$$

(\*): Weil  $q$  die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt gilt  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . Bei (\*\*) und (\*\*\*) vertauschen die zweiten Ableitungen. Damit folgt

$$0 = \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \hat{h}_i^{(\alpha)}}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \chi(\hat{q}, t, \alpha) \right].$$

Wertet man dies bei  $\alpha = 0$  aus, wo  $\hat{q} = \vec{q}$ , dann folgt Noether.

**Bemerkung:**

- Konstruktiver Satz für  $J$ .
- Es ist kontinuierliche Symmetrie nötig, so dass nach  $\alpha$  differenziert werden kann. Bei diskreter Symmetrie folgt keine Erhaltungsgröße.
- Symmetrie  $\Rightarrow$  Erhaltungsgröße (Die Umkehrung gilt nicht. Gegenbeispiel: Runge-Lenz-Vektor beim Potential  $V(\vec{r}) = \frac{c}{r}$ ). Erst in der Hamilton-Mechanik wird sich eine Struktur ergeben, in der Äquivalenz gilt.

**4.4.4.4 Homogenität / Translationsinvarianz und Impulserhaltung beim  $N$ -Teilchen-System**

Räumlich „homogen“ („translationsinvariant“) bedeutet, dass die drei Verschiebungen  $a_x, a_y, a_z$   $\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{a}$  mit festem Vektor  $\vec{a}$  die Lagrange-Dichte  $L$  invariant lassen. Sei

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{L} &= L(\vec{r}_1 = \vec{r}_1 + \vec{a}, \dots) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}, \dots) \\ &\stackrel{\text{homogen}}{=} \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots). \end{aligned}$$

Dies ist zum Beispiel erfüllt für

- (1)  $U = \text{kons.} \curvearrowright$  freie Teilchen – langweilig.
- (2)  $U$  hängt nur von den Teilchenabständen ab,  $U = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \vec{r}_2 - \vec{r}_3, \dots)$ . Mit Noether folgt

$$\vec{J}_{\vec{a}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{q}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{p}$$

mit  $\vec{r}_i = \vec{r}_i + \vec{a}$ . Der Gesamtimpuls  $\vec{p}$  ist in einem homogenen System (bei Translationsinvarianz) erhalten.

#### 4.4.5 Isotropie / Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung im $N$ -Teilchen-System

Räumlich isotrop heißt, dass eine Drehung um einen beliebigen Winkel um eine beliebige Achse die Lagrange-Dichte  $L$  invariant lässt. Wähle die  $z$ -Achse parallel zur Drehachse,  $\hat{z} \parallel$  Drehachse. Damit bekommt man die Drehmatrix

$$\underline{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also  $\vec{r}_i = \underline{R}_\alpha \vec{r}_i$  für  $i = 1, \dots, N$ . Damit  $\vec{r}_i = \underline{R}_\alpha^T \vec{r}_i$ , weil  $\underline{R}_\alpha \underline{R}_\alpha^{-1} = \underline{1}$ . Dies setzen wir in  $\bar{L}$  ein und erhalten

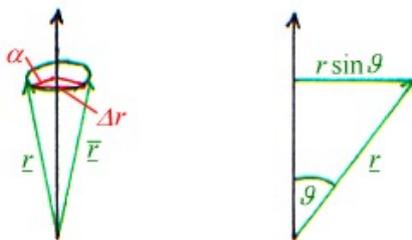
$$\bar{L} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \underbrace{\underline{R}_\alpha^{-1} \underline{R}_\alpha^{-1}}_{=\underline{1}} \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\dots, \underbrace{\underline{R}_\alpha^T(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}_{\substack{\text{wg. Homogenität} \\ =\vec{r}_i - \vec{r}_j}}, \dots).$$

Rotationsinvarianz gilt nur für alle Achsen und Winkel, wenn nur  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  für alle Paare  $i, j$  auftritt, d.h. das Potential nur von den Längen der Abstände zwischen den Teilchen abhängt. Dann gilt

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\dots, |\vec{r}_i - \vec{r}_j|, \dots).$$

Für Erhaltungsgröße wird  $\left. \frac{\partial \bar{r}(\vec{r}, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$  benötigt. Weil  $d\vec{r} \perp \hat{r}, \vec{r}$  folgt  $d\vec{r} = d\alpha \hat{z} \times \vec{r}$  und  $\vec{r}_i = \vec{r}_i + \alpha \hat{z} \times \vec{r}_i + \mathcal{O}(\alpha^2)$  für  $\alpha \rightarrow 0$  (cf. Abbildung 4.17). Es folgt

$$\begin{aligned} J_z &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \hat{z} \times \vec{r}_i = \hat{z} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ &= \sum_{i=1}^N L_i^{(z)} = l^{(z)}. \end{aligned}$$

Abbildung 4.17: Drehung um den infinitesimalen Winkel  $d\alpha$ .

Die  $z$ -Komponente des Gesamtdrehimpulses ist erhalten.  $\curvearrowright$  Isotropie (d.h. beliebige Richtung der Drehachse)  $\curvearrowright \vec{L} = \text{konst.}$

## 4.5 Hamilton'sche Mechanik

### 4.5.1 Hamilton'sche Funktion und Hamilton'sche Gleichungen

#### 4.5.1.1 Definition

Das System der  $f$  Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad 1 \leq i \leq f \quad (4.5.1)$$

( $f$  gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung) der Variationsrechnung, die das Wirkungsfunktional

$$S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$$

extremal machen, ist äquivalent zum System von  $2f$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\boxed{\frac{d}{dt} q_i(t) = \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t)}{\partial p_i}} \quad (4.5.2a)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} p_i(t) = \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t)}{\partial q_i}} \quad (4.5.2b)$$

für  $1 \leq i \leq f$ . Dies sind die Hamilton-Gleichungen, wobei

$$H(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L$$

von den zueinander konjugierten Variablen  $\vec{q}$  (Ort) und  $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{p}}}$  (kanonischer Impuls) abhängt. Bei der Berechnung von  $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$  müssen also die  $f$  Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

aufgelöst bzw. invertiert werden nach

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t),$$

was dann eingesetzt werden muss.

**Beispiel:** Eindimensionale Bewegung im Potential

Es gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung  $m\dot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$ . Für die kinetische Energie gilt  $T = \frac{m}{2}\dot{q}^2$  und für die potentielle Energie  $U = U(q)$ . Damit ist die Lagrange-Funktion  $L = T - U = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)$ . Für den kanonischen Impuls gilt  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \cdot \dot{q}$ . Durch Invertieren erhält man  $\dot{q} = \frac{p}{m}$ . Dies setzen wir in die Hamilton-Funktion ein und erhalten

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p\dot{q} - L = p \left( \frac{p}{m} \right) - \frac{m}{2} \left( \frac{p}{m} \right)^2 + U(q) = \frac{p^2}{2m} + U(q) \\ &= T + U. \end{aligned}$$

Die Lagrange-Gleichung für dieses Problem lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} m\dot{q} = m\ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

Die Hamilton-Gleichung ist

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

Die Aussage von vorhin besagt, dass beide Zugänge identische Bahnen ergeben (bei gleichen Anfangsbedingungen).

**Beweis:**

Betrachte die totalen Differentiale einmal  $dH(\vec{q}, \vec{p}, t)$  der Hamilton-Funktion

$$dH(\vec{q}, \vec{p}, t) = \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \cdot d\vec{q} + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \cdot d\vec{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

(eine äquivalente Darstellung, welche die totalen Differentiale vermeidet, lautet  $\frac{d}{dt} H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \dot{\vec{q}} + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}} + \frac{\partial H}{\partial t}$  (Achtung:  $H$  hängt nicht von  $\dot{q}$  ab!), sowie  $dX$ , wobei

$$X = X(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t).$$

Es gilt also

$$dX = -\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} d\vec{q} + \left( \vec{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) d\dot{\vec{q}} + \dot{\vec{q}} d\vec{p} - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

(Anmerkung zur Schreibweise:  $\left( \vec{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) d\dot{\vec{q}} = \sum_i \left( -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + p_i d\dot{q}_i \right)$ .) Aus dem Vergleich  $dH \stackrel{!}{=} dX$  folgt bei den einzelnen Quotienten:

- bei  $d\dot{\vec{q}}$  folgt  $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}$  (\*).
- bei  $d\vec{p}$  folgt  $\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$ .
- bei  $d\vec{q}$  folgt  $\dot{\vec{p}} \stackrel{(*)}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \stackrel{\text{EL-Gl.}}{=} \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}$ .
- bei  $dt$  folgt  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ .

Damit ist die Behauptung gezeigt.

### 4.5.1.2 Hamilton'sche Gleichung

#### Bemerkung:

- $H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \dot{\vec{q}} \cdot \vec{p} - L$  heißt Hamilton'sche Funktion und spielt beim Übergang zur Quantenmechanik eine zentrale Rolle.
- $H(\vec{q}, \vec{p})$  ist eine Funktion im  $2f$ -dimensionalen „Phasenraum“  $(\vec{q}, \vec{p})$ , wenn  $f$  die Zahl der Freiheitsgrade ist (d.h. der Konfigurationsraum ist  $f$ -dimensional).
- Jedes Variationsproblem, das mit  $L$  formuliert wurde, kann auch mit  $H$  gelöst werden, wenn eine Auflösung  $\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t)$  möglich ist. Für typische mechanische Systeme mit quadratischer kinetischer Energie  $T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{q}_j^2$  und  $L = T - U(\vec{q})$  ist  $H$  die Gesamtenergie

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + U(\vec{q})$$

mit  $p_j = m\dot{q}_j$ . Der Beweis läuft analog zum bereits besprochenen eindimensionalen Fall.

### 4.5.1.3 Energieerhaltung

Aus dem totalen Differential  $dH$  folgt die totale Zeitableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) &= \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &\stackrel{\text{Hamilton-Gl.}}{=} \underbrace{-\dot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{q}} + \dot{\vec{q}} \cdot \dot{\vec{p}}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} \stackrel{\text{Abs. 4.5.1.1}}{=} -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wenn also  $H$  oder  $L$  nicht explizit von der Zeit abhängen ( $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ), dann ist die Hamilton'sche Funktion konstant entlang der Bahn  $H(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ , wobei  $\vec{q}(t)$  und  $\vec{p}(t)$  Lösungen der Hamilton-Gleichungen sind, konstant. Das System heißt autonom.

#### Bemerkung:

- $H(\vec{q}, \vec{p})$  liefert Bewegungsgleichungen über die Hamilton'sche Funktion. Wenn die Bahn bekannt ist oder  $\vec{p} = \vec{p}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$  bekannt ist, kann natürlich  $H(\vec{q}, \vec{p}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)) = H(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$  berechnet werden.  $H(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$  liefert aber keine Bewegungsgleichungen. Bsp.: freies Teilchen im konstanten Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{r})$ . Hier gilt  $T = \frac{m}{2} v^2 = H(\vec{v})$ .

## 4.5.2 Phasenraum

Der  $2f$ -dimensionale Raum  $(\vec{q}, \vec{p})$  (Ort und kanonische Impulse) heißt Phasenraum. Eine Bewegung entspricht einer Bahn („Trajektorie“) im Phasenraum  $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ , festgelegt durch die Hamilton-Gleichungen

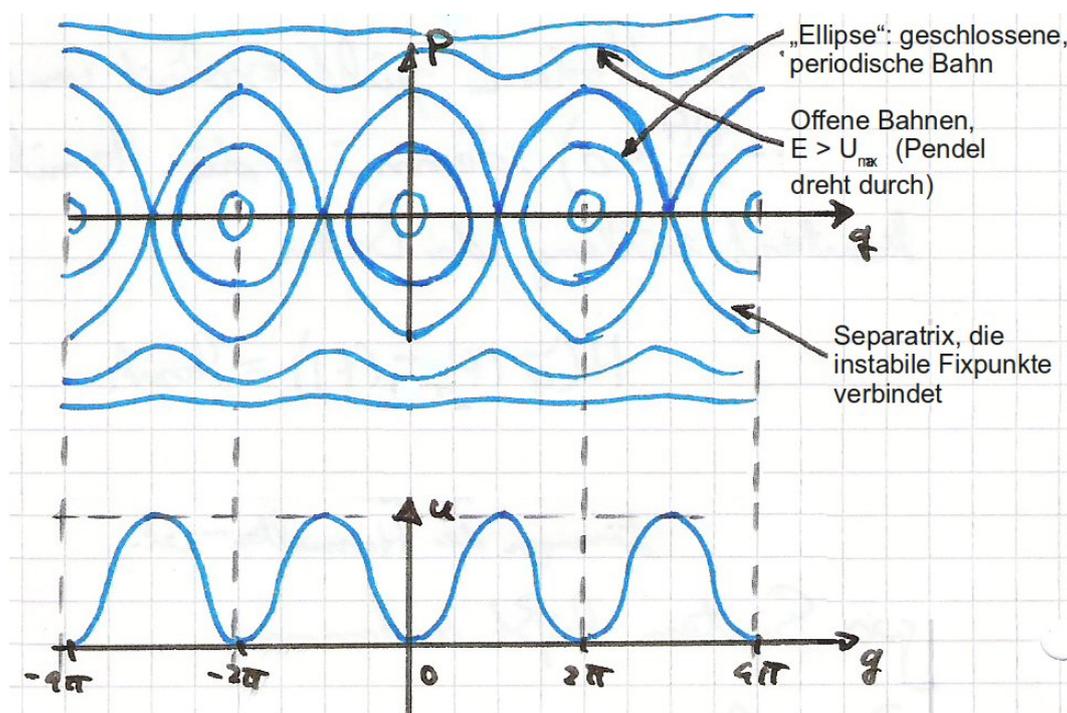
$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

und die Anfangsbedingungen  $\vec{q}(t_0) = \vec{q}_0$  und  $\vec{p}(t_0) = \vec{p}_0$ . Aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt, dass zu jedem Startpunkt  $(\vec{q}_0, \vec{p}_0)$  genau eine Bahn gehört, die keine andere schneidet.

**Beispiel:** Pendel Wir betrachten ein Pendel, welches sich auch überschlagen kann. Die Hamilton'sche Funktion ist

$$H = \frac{p^2}{2m} + \underbrace{m\omega_0^2(1 - \cos(q))}_{U(q)}.$$

Abbildung 4.18 zeigt den Phasenfluss des Pendels für verschiedene Anfangspunkte. Die Abbildung  $(\vec{q}_0, \vec{p}_0) \mapsto$



**Abbildung 4.18:** Phasenfluss des Pendels bei verschiedenen Anfangswerten (oben) und zugehöriges Potential (unten).

$(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ , die jedem (Anfangs-)Punkt des Phasenraums zu einem späteren Zeitpunkt  $t$  den Punkt  $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$  der Bahn zuordnet, heißt Phasenraumfluss.

### 4.5.3 Satz von Liouville

Der Phasenraumfluss erhält das Volumen, d.h. ein Bereich  $D_0$  von Startpunkten (mit Volumen  $V_0$ ) wird auf den Bereich  $D(t)$  mit anderer Form aber selbem Volumen  $V(t) = V_0$  abgebildet (cf. Abbildung 4.19).

#### **Bemerkung:**

Dieser Satz stellt die Grundlage der statistischen Mechanik dar (stimmt nicht mit Dissipation).

#### **Beweis:**

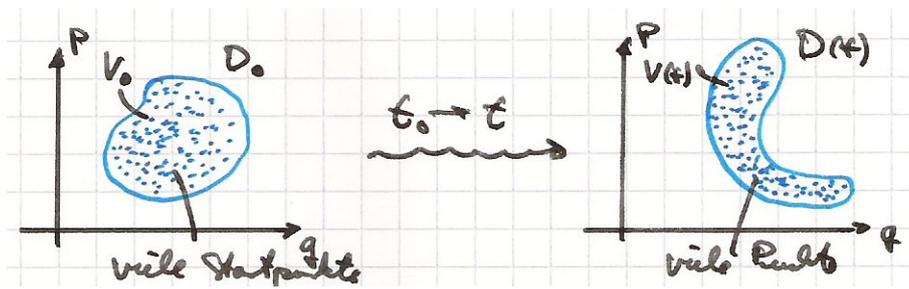


Abbildung 4.19: Der Bereich  $D_0$  wird in der Zeit  $t$  auf den Bereich  $D(t)$  mit selbem Volumen abgebildet.

Das Anfangsvolumen  $V_0$  bei  $t_0$  ist gegeben durch

$$V_0 = \int_{D_0} \prod_{i=1}^f dq_i^0 dp_i^0.$$

Für  $t > t_0$  gilt

$$V(t) = \int_{D(t)} \prod_{i=1}^f dq_i(t) dp_i(t).$$

Nun sei eine Variablensubstitution in  $V(t)$  durchgeführt. Damit erhält man

$$V(t) = \int_{D(t)} \prod_{i=1}^f dq_i^0 dp_i^0 \det \left( \frac{\partial(q(t)p(t))}{\partial q_i^0 p_i^0} \right).$$

$\det \left( \frac{\partial(q(t)p(t))}{\partial q_i^0 p_i^0} \right) =: J(t)$  ist eine Funktional- bzw. Jakobideterminante bei Wechsel der Integrationsvariablen. Wir behaupten nun, dass

$$J(t) \equiv 1.$$

Den Beweis führen wir über die Differentialgleichung mit Startwert  $J(t_0 = 0) = 1$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t) &= \left. \frac{d}{ds} J(t+s) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \frac{\partial(q(t+s)p(t+s))}{\partial(q(t)p(t))} \frac{\partial(q(t)p(t))}{\partial(q(t_0)p(t_0))} \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{dJ(t)}{dt} \right|_{t=0} J(t). \end{aligned}$$

Es reicht  $\left. \frac{dJ(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$  zu zeigen. Zur Vereinfachung sei  $f = 1$  mit

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 + \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_{q_0, p_0} t + \mathcal{O}(t^2), \\ p(t) &= p_0 - \left. \frac{\partial H}{\partial q} \right|_{q_0, p_0} t + \mathcal{O}(t^2). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \frac{\partial q(t)}{\partial q_0} & \frac{\partial q(t)}{\partial p_0} \\ \frac{\partial p(t)}{\partial q_0} & \frac{\partial p(t)}{\partial p_0} \end{vmatrix} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \Big|_{q_0, p_0} t & \mathcal{O}(t) \\ \mathcal{O}(t) & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \Big|_{q_0, p_0} t \end{vmatrix} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \Big|_{q_0, p_0} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \Big|_{q_0, p_0} = 0. \end{aligned}$$

(Bei der Berechnung der Determinante ist folgendes zu beachten. Die Nichtdiagonalterme  $\mathcal{O}(t)$  werden durch die Berechnung der Determinante mit der üblichen Formel zu  $\mathcal{O}(t^2)$ , ableiten nach  $t$  ergibt wieder  $\mathcal{O}(t)$  und an der Stelle  $t = 0$  werden sie zu Null. Die Einser bei den Termen links oben und rechts unten werden durch das Ableiten nach  $t$  eliminiert, genauso werden die „ $t$ “ in diesen Termen zu „1“.) Damit folgt dann

$$\frac{dJ(t)}{dt} = 0 \cdot J(t) = 0,$$

und mit dem Anfangswert folgt schließlich

$$J(t) \equiv 1,$$

wie gewünscht.

#### **Bemerkung:**

Die Phasenströmung ist „divergenzfrei“, wie die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit.

### 4.5.4 Poisson-Klammern

#### 4.5.4.1 Definition

Für zwei Funktionen  $F(\vec{q}, \vec{p})$  und  $G(\vec{q}, \vec{p})$  im Phasenraum ist die Poisson-Klammer (PK) definiert durch

$$\{F; G\} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (4.5.3)$$

und ist wieder eine Funktion im Phasenraum.

#### 4.5.4.2 Eigenschaften

- (1) Antisymmetrie:  $\{F, G\} = -\{G, F\}$ .
- (2) Es gilt  $\{F, F\} = 0$ .
- (3) Nullelement:  $\{F, \text{konst.}\} = 0$
- (4) Linearität mit Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ :

$$\{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\}$$

(5) Leibniz-Produktregel:

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + G\{F, H\}$$

(Beweis in Aufgabe 25)

(6) Jakobi-Identität

$$0 = \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\}$$

**Beweis:**

Zunächst führen wir die Abkürzung

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{x}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \vec{q}} \\ \frac{\partial F}{\partial \vec{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial p_f} \end{pmatrix} \quad (4.5.4)$$

als  $2f$ -dimensionalen Vektor bei  $f$  Freiheitsgraden ein. Damit gilt

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \frac{\partial F^T}{\partial \vec{x}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \vec{1} \\ -\vec{1} & 0 \end{pmatrix}}_* \frac{\partial G}{\partial \vec{x}} \\ &= \sum_{i,j=1}^{2f} \frac{\partial F}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Bei  $*$  sind die  $\vec{1}$  jeweils  $(f \times f)$ -dimensionale Eins-Matrix. Die gesamte Matrix  $*$  ist dann eine  $(2f \times 2f)$ -dimensionale Matrix mit  $J_{ij} = -J_{ji}$ , sie ist also antisymmetrisch. Zusätzlich kürzen wir nun

$$\sum_{i,j=1}^{2f} \frac{\partial F}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j} = \sum_{ij} F_i J_{ij} G_j$$

ab. Es folgt

$$\begin{aligned} \{H, \{F, G\}\} &= \sum_{\substack{m \\ i}} H_m J_{mn} \frac{\partial}{\partial x_n} (F_i J_{ij} G_j) \\ &= \sum_{\substack{m \\ i}} H_m J_{mn} (F_{in} J_{ij} G_j + F_i J_{ij} G_{nj}). \end{aligned}$$

Damit schreiben wir den Term der Jakobi-Identität auf:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \\ i}} [ & F_m J_{mn} J_{ij} (G_{in} H_j \\ & + G_i H_{nj}) + G_m J_{mn} J_{ij} (H_{in} F_j + H_i F_{nj}) \\ & + H_m \underbrace{J_{mn} J_{ij}}_{\text{selbe Matrizen}} (F_{in} G_j + F_i G_{nj})]. \end{aligned}$$

Wir haben sechs Terme, in denen auftreten

$$\begin{array}{lll} F_m G_i H_{nj} & \& F_j G_m H_{in} \\ F_m H_j G_{in} & \& F_i H_m G_{nj} \\ G_m H_i F_{nj} & \& G_j H_m F_{in} \end{array}$$

diese Terme (in einer Zeile) sind bis auf Indexverschiebung jeweils identisch. Wir betrachten den rechten Term  $\sum_{i,j}^m J_{mn} J_{ij} G_j H_m F_{in}$  und setzen  $j \rightarrow m'$ ,  $m \rightarrow i'$ ,  $n \rightarrow j'$  und  $i \rightarrow n'$ . Man erhält

$$\sum_{\substack{m' \\ i' \\ j'}} J_{i'j'} J_{n'm'} G_{m'} H_{i'} F_{n'j'}.$$

Dies ist aber identisch zum linken Term bis auf  $J_{n'm'} = -J_{mn}$ . Die dritte Zeile hebt sich weg zu Null. Gleiches gilt für die ersten beiden Zeilen. Damit folgt die Behauptung.

#### 4.5.4.3 Elementare Beispiele

(1)

$$\{q_i, q_j\} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = 0$$

genauso:

$$\{p_i, p_j\} = 0.$$

Außerdem gilt

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0} = \delta_{ij}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \{q_i, H\} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - 0 = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \{p_i, H\} &= \sum_{k=1}^f 0 - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

#### 4.5.4.4 Hamilton'sche Bewegungsgleichung

##### **Satz:**

Die totale Zeitableitung einer im (um  $t$  erweiterten) Phasenraum definierten Funktion  $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$  entlang der durch die Bewegung des Systems gegebenen Bahn  $((\vec{q}(t), \vec{p}(t)))$  aus der Hamilton-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} F(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}. \quad (4.5.5)$$

**Beweis:**

Allgemein gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &\stackrel{\text{Hamilton-Gl.}}{=} \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dies ist aber schon die Behauptung.

Wichtige Beispiele zu diesem Satz sind

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q_i(t) &= \dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{d}{dt}p_i(t) &= \dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

**4.5.4.5 Erhaltungsgrößen****Satz:**Eine (nicht explizit von  $t$  abhängige) Funktion  $F(\vec{q}, \vec{p})$  ist Erhaltungsgröße genau dann, wenn  $\{F, H\} = 0$ .**Beweis:**

Man sieht, dass gemäß der Hamilton'schen Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}F = \{F, H\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(\vec{q}(t), \vec{p}(t)) = \text{konst..}$$

Wir haben im Folgenden zum Ziel, den Zusammenhang zwischen  $F$  und Symmetrien zu klären.**4.5.4.6 Koordinatenunabhängigkeit der Poissonklammern****Satz:**Poissonklammern sind unabhängig von der Wahl der „kanonischen Koordinaten“, d.h. für zwei Mengen  $\{\vec{q}, \vec{p}\}$  und  $\{\vec{Q}, \vec{P}\}$ , welche durch so genannte „kanonische Koordinatentransformationen“ verknüpft sind, gilt

$$\begin{aligned} K(\vec{q}, \vec{p}) = \{F, G\}_{\vec{p}, \vec{q}} &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} \right) = \{F, G\}_{\vec{Q}, \vec{P}} = K(\vec{Q}, \vec{P}). \end{aligned}$$

Der Beweis dieses Satzes wird erst in Abschnitt 4.5.5 geführt.

## 4.5.5 Kanonische Koordinatentransformationen

### 4.5.5.1 Definition

Eine ((zur Vereinfachung) zeitunabhängige) Transformation im Phasenraum  $\vec{q}, \vec{p} \mapsto \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p})$  und  $\vec{q}, \vec{p} \mapsto \vec{P}(\vec{q}, \vec{p})$  heißt kanonisch genau dann, wenn die fundamentalen Poissonklammern invariant bleiben, d.h. aus

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

folgt

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}.$$

### Satz:

Eine (zeitunabhängige) kanonische Koordinatentransformation lässt die Poissonklammern forminvariant. (cf. Abschnitt 4.5.4.6).

### Beweis:

$$\begin{aligned} \{F(\vec{q}, \vec{p}), G(\vec{q}, \vec{p})\}_{\vec{q}, \vec{p}} &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ &= \sum_{ij} \left( \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \frac{\partial G}{\partial p_i} - \dots \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial F}{\partial Q_j} \left( \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial P_j} \left( \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j} \{Q_j, G\} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \{P_j, G\} \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Verwendet man nun (4.5.6) mit  $G = Q_i(\vec{q}, \vec{p})$  und  $G = P_i(\vec{q}, \vec{p})$ , so treten fundamentale Poisson-Klammern auf, welche nach Definition der Koordinatentransformation als kanonische bekannt sind, also  $\{Q_j, P_i\} = \delta_{ij}$ , etc.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \{F(\vec{q}, \vec{p}), Q_i(\vec{q}, \vec{p})\} &= -\frac{\partial F}{\partial P_i} \\ \{F(\vec{q}, \vec{p}), P_i(\vec{q}, \vec{p})\} &= +\frac{\partial F}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

ersetze  $F \rightarrow G$  und setze in (4.5.6) ein

Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{\vec{q}, \vec{p}} &= \sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j} \left( +\frac{\partial G}{\partial P_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial Q_j} \\ &= \{F, G\}_{\vec{Q}, \vec{P}}. \end{aligned}$$

### Bemerkung:

Der Phasenfluss  $(q_0, p_0) \rightarrow (q(t), p(t))$  ist für festes  $t$  eine kanonische Koordinatentransformation (ohne Beweis).

### 4.5.5.2 Infinitesimale kanonische Abbildungen und Erzeugende

**Satz:**

In linearer Ordnung in  $\alpha$  ist

$$g_i^\alpha(\vec{q}, \vec{p}) = q_i + \alpha \frac{\partial G(\vec{q}, \vec{p})}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\alpha^2) \text{ für } i \in \{1, \dots, f\}$$

und

$$p_i^\alpha(\vec{q}, \vec{p}) = p_i - \alpha \frac{\partial G(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_i} + \mathcal{O}(\alpha^2) \text{ für } i \in \{1, \dots, f\} \quad (\text{a})$$

eine kanonische Koordinatentransformation.

Die Funktion  $G(\vec{q}, \vec{p})$  heißt Erzeugende der kanonischen Koordinatentransformation. Eine beliebige Funktion  $F(\vec{q}, \vec{p})$  erfüllt

$$\frac{d}{d\alpha} F(q^\alpha, p^\alpha) \Big|_{\alpha=0; \vec{q}, \vec{p} \text{ fest}} = \{F, G\}. \quad (\text{b})$$

**Beweis:**

(a): Es gilt

$$\begin{aligned} \{q_i^\alpha, p_i^\alpha\} &= \{q_i, p_j\} + \alpha \left( \left\{ \frac{\partial G}{\partial p_i}, p_j \right\} - \left\{ q_i, \frac{\partial G}{\partial q_i} \right\} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \{q_i, p_j\} + \alpha \underbrace{\left( \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial q_j} \right)}_{=0} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \{q_i, p_j\} + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned}$$

Das ist aber schon die Behauptung.

(b): Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} F(\vec{q}^{(\alpha)}, \vec{p}^{(\alpha)}) \Big|_{\alpha=0} &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial p_i^{(\alpha)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial q_i^{(\alpha)}}{\partial \alpha} \right) \\ &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \\ &= \{F, G\} \end{aligned}$$

### 4.5.6 Verallgemeinertes Noether Theorem

Seien  $\vec{p}^{(\alpha)}$  und  $\vec{q}^{(\alpha)}$  bezüglich  $\alpha$  kontinuierliche Abbildungen mit  $G(\vec{p}, \vec{q})$  als Erzeugender der zugehörigen kanonischen Abbildung (aus Abschnitt 4.5.5.2).

Ist die Hamilton'sche Funktion invariant, d.h.

$$H(\vec{q}^{(\alpha)}, \vec{p}^{(\alpha)}) = H(\vec{q}, \vec{p}), \quad (4.5.7)$$

es liegt also eine „Symmetrie“ vor, so ist die Erzeugende der Symmetrietransformation  $G(\vec{q}, \vec{p})$  eine Erhaltungsgröße. Umgekehrt ist jede Erhaltungsgröße Erzeugende einer Symmetrie.

**Beweis:**

„ $\Rightarrow$ “: Wenn  $H$  sich nicht ändert, dann ist natürlich auch die Ableitung Null. Aus (4.5.7) folgt also

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{d\alpha} H(\vec{q}^{(\alpha)}, \vec{p}^{(\alpha)})|_{\alpha=0} \\
 &\stackrel{(b) \text{ aus Abschn. 4.5.5.2}}{=} \{H, G\} = 0 \\
 \stackrel{\text{Abschn. 4.5.4.5}}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} G &= 0.
 \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Siehe IK4, wie aus  $G$  die Abbildung  $(\vec{q}^{(\alpha)}, \vec{p}^{(\alpha)})$  konstruiert werden kann, und dass (4.5.7) gilt.

**Bemerkung:**

In Tabelle 4.1 wird der Nutzen des Wegs von der Newton’schen Mechanik zur Hamilton’schen veranschaulicht.

	Newton	Lagrange	Hamilton
Bewegungsgleichung:	$m \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{F}$	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0$	$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}, \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$
Forminvariant unter:	Galilei-Transformationen: $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t.$	„Punkt-Koordinatentransformationen“: $\vec{q}' = \vec{g}(\vec{q}, t).$	kanonischen Koordinatentransformationen: $\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}),$ $\vec{P} = \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}).$ Sie kann $\vec{q}$ und $\vec{p}$ mischen.
Vor- und Nachteile	Bei anderen Koordinatentransformationen als Galilei-Transformationen treten Scheinkräfte auf.	Symmetrie $\Rightarrow$ Erhaltungsgröße $J = \vec{p} \frac{\partial \vec{q}}{\partial \alpha} _{\alpha=0}.$	Erzeugende einer Symmetrie $\Leftrightarrow$ Erhaltungsgröße

**Tabelle 4.1:** Vergleich der verschiedenen mechanischen Konzepte.

**Bemerkung:**

Siehe Aufgabe 25, b) und c), wo Erhaltungsgrößen gefunden werden, die nicht linear in  $\vec{p}$  sind:  $A_{ij} \propto p_i p_j + m w^2 q_i q_j$  und der Runge-Lenz-Vektor.

Es sind nur die folgenden Probleme exakt lösbar:

- Freies Teilchen (klassisch, quantenmechanisch oder quantenfeldtheoretisch)
- Harmonischer Oszillator (klassisch, quantenmechanisch)
- $\frac{1}{r}$ -Potential (Kepler, Schrödinger, Dirac)
- 2 Niveau System (Pauli)
- zweidimensionaler Ising-Magnet (Onsager)

Diese idealen Systeme werden überall eingesetzt. Man benutzt *Störungsverfahren* für reale Systeme in der Nähe dieser idealen. Auf jene wird im folgenden Abschnitt eingegangen werden.

## 4.6 Störungsrechnung

### 4.6.1 Asymptotische Entwicklungen

Es existiere ein kleiner Parameter  $\varepsilon$  mit  $|\varepsilon| \ll 1$ , so dass die unbekannt Lösung eines Problems als Reihe gegeben ist

$$f \approx f(\varepsilon) = \sum_{n=1}^M c_n \varepsilon^n$$

mit einer großen ganzen Zahl  $M$ . (Manchmal treten auch Potenzen  $\varepsilon^{na+b}$  mit  $a > 0$  auf.)  $f$  ist die gesuchte Lösung. Man schreibt dann

$$f = \sum_{n=1}^M c_n \varepsilon^n + \underbrace{\mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})}_{\text{Rest soll } \leq \varepsilon^{M+1} \text{ sein}}, \quad (4.6.1)$$

wobei die Konvergenz der Reihe für  $M \rightarrow \infty$  nicht interessiert. Meistens gilt sie auch gar nicht. Jedoch wird die Näherung beliebig gut für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Man nennt eine solche Reihe *asymptotische Reihe*.

### 4.6.2 Multi-Skalenverfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

#### 4.6.2.1 Beispiel: anharmonischer Oszillator

Hier gilt die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + Ax^2 + Bx^3) = 0, \quad (4.6.2)$$

mit  $A, B > 0$ , für kleine Auslenkungen mit  $x(t=0) = \varepsilon$ ,  $\dot{x}(t=0) = 0$ . Reskalieren zeigt, wo  $\varepsilon$  in der Differentialgleichung auftaucht:  $y(t) = \frac{x(t)}{\varepsilon}$ . Damit bekommt man

$$\ddot{y} + \omega_0^2(y + A\varepsilon y^2 + B\varepsilon^2 y^3) = 0 \quad (4.6.3)$$

mit  $y(0) = 1$  und  $\dot{y}(0) = 0$ . Skalierung ist der Kern dieses Verfahrens. Später folgt noch Skalierung in  $t$ .

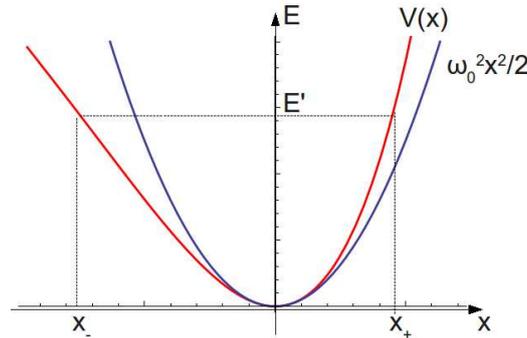
#### Bemerkung:

- Der harmonische Oszillator bei  $\varepsilon = 0$  ist das „ungestörte“ Problem

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

mit der allgemeinen Lösung  $y(t) = R \cos(\omega_0 t + \Theta)$ , wobei  $R$  und  $\Theta$  die Integrationskonstanten sind.  $\tau_0 = \omega_0^{-1}$  ist die natürliche Zeitskala;  $dh\tau_0$  variiert zum Beispiel zwischen 1 und 10, wo wir die Funktion wollen.

- Die Kraft beim anharmonischen Oszillator folgt aus dem Potential  $V = \omega_0^2 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} \right)$ . Wegen Energieerhaltung  $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x)$  ist die Bewegung beschränkt und periodisch (cf. Abbildung 4.20).



**Abbildung 4.20:** Diskussion des Potentials (rot) des anharmonischen Oszillators. Bei der Gesamtenergie  $E'$  kann sich die Auslenkung nur zwischen  $x_-$  und  $x_+$  bewegen.

### 4.6.2.2 Reguläre Störungsrechnung

Der Ansatz einer regulären Störungsrechnung lautet

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots, \tag{4.6.4}$$

mit  $y_0(t) = R \cos(\omega_0 t + \Theta)$ . Nun muss man stumpfsinnig einsetzen.

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : & \left[ \begin{array}{l} \ddot{y}_0 \\ +\omega_0^2(y_0) \end{array} \right] \varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 : & \left[ \begin{array}{l} +\ddot{y}_1 \\ +\omega_0^2(y_1 + Ay_0^2) \end{array} \right] \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 : & \left[ \begin{array}{l} +\ddot{y}_2 \\ +\omega_0^2(y_2 + 2Ay_0y_1 + By_0^3) \end{array} \right] \varepsilon^2 \end{aligned} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0$$

Alle Zeilen ( $\hat{=}$  den Ordnungen in  $\varepsilon^n$ ) werden einzeln und nacheinander bis zur gewünschten Ordnung  $\varepsilon^n$  gelöst: (jede Zeile muss Null ergeben)

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : & \quad y_0 = R \cos(\omega_0 t + \Theta) \\ \varepsilon^1 : & \quad \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = -A\omega_0^2 y_0^2 \propto \cos(2\omega_0 t + 2\Theta) \end{aligned}$$

Bei der ersten Ordnung erhalten wir einen getriebenen harmonischen Oszillator (außer Resonanz, die Frequenz der treibenden Kraft ist  $2\omega_0$ , also nicht  $\omega_0$ ) mit Lösung

$$y_1 = -\frac{A}{2}R^2 + \frac{A}{6}R^2 \cos(2\omega_0 t + 2\Theta) \tag{4.6.5}$$

(Probe durch Einsetzen). In der Ordnung  $\varepsilon^2$  haben wir:

$$\ddot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 \stackrel{\text{Einsetzen von } y_1 \text{ \& } y_2}{=} \omega_0^2 \left( -\frac{3}{4}BR^2 + \frac{5}{6}A^2R^2 \right) \underbrace{\cos(\omega_0 t + \Theta)}_* + \dots \tag{4.6.6}$$

An dem Faktor  $*$  erkennt man ein resonantes Treiben des harmonischen Oszillators für  $y_2$  mit Frequenz  $\omega_0$ . Man sieht: Die Lösung  $y_2(t)$  wächst mit  $t$  an wie  $y_2(t) \propto \omega_0 t \sin(\omega_0 t + \Theta)$ , so dass  $x(t) \sim \varepsilon^2 y_2(t)$  nicht mehr beschränkt ist nach einer Zeit  $t\omega_0\varepsilon^2 \approx 1$ . Aus der Diskussion des Potentials wissen wir aber, dass die Bewegung endlich sein muss. Wenn wir an Lösungen für  $t > \frac{1}{\omega_0\varepsilon^2}$  interessiert sind, müssen wir besser rechnen.

### 4.6.2.3 Multiskalenverfahren

Wir nehmen an, dass die Integrationskonstanten  $R$  und  $\Theta$  langsame Funktionen der Zeit sind, also  $R = R(\varepsilon^2 \omega_0 t)$  und  $\Theta = \Theta(\varepsilon^2 \omega_0 t)$ . Damit machen wir den Ansatz

$$y(t) = R(\varepsilon^2 \omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \Theta(\varepsilon^2 \omega_0 t)) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots$$

Damit ist z.B.

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 y(t) = \dots + \varepsilon^2 (\ddot{y}_2 - 2R'\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \Theta) - 2R\Theta'\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \Theta)) + \dots,$$

wobei  $R' = \frac{dR(x)}{dx}$ . Die resonanten Terme der Gleichung für  $y_2$  ändern sich zu

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 &= \omega_0^2 \left( \frac{3}{4} B R^2 + \frac{5}{6} A^2 R^2 - 2R\Theta' \right) \cos(\omega_0 t + \Theta) - 2R'\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \Theta) \\ &+ \text{„nichtresonante Terme“}, \text{ z.B. } \cos(2\omega_0 t). \end{aligned}$$

Aus der „Poincaré’schen Säkularbedingung“ (die resonanten Terme müssen wegfallen) folgt:  $R' = 0 \Rightarrow R(\varepsilon^2 \omega_0 t) = R = 1$  (aus Anfangsbedingung  $y(0) = 1$ ) und

$$\begin{aligned} \Theta' &= \left( \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) \\ \Rightarrow \Theta &= \left( \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) \omega_0 \varepsilon^2 t, \end{aligned}$$

wobei die Anfangsbedingung  $y'(0) = 0 \Rightarrow \Theta'(0) = 0$ . Daraus ergibt sich

$$x(t) = \varepsilon \cos(\omega t) + \varepsilon^2 A \left( \frac{1}{6} \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.6.7)$$

mit

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right). \quad (4.6.8)$$

Wichtig: Die Frequenz  $\omega$  des anharmonischen Oszillators ist nicht die selbe des harmonischen Oszillators. Bei der regulären Störungsrechnung in Abschnitt 4.6.2.2 hatten wir hingegen immer die gleiche Frequenz. Die Frequenz unseres anharmonischen Oszillators hängt also von der Auslenkung ab. (Regulär wäre gewesen:  $\cos(\omega t) \approx \cos(\omega_0 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ).

### 4.6.3 Ausblick Chaos

**Beispiel:** Doppelpendel

Das Doppelpendel wurde in Teilen schon in Aufgabe 24 diskutiert. Es ist selbst mit modernen numerischen Verfahren nicht möglich die Bewegung eines Doppelpendels auf lange Zeit hin vorherzusagen. Die Anfangsbedingungen müssten hierfür unmöglich genau bekannt sein.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Beliebiges Volumen $V$ , durch welches ein magnetischer Fluss betrachtet wird. . . . .	8
1.2	Beliebige Fläche $A$ in der $x$ - $y$ -Ebene, durch die ein magnetischer Fluss betrachtet wird. . . . .	8
1.3	Magnetfeld $\vec{B}$ durch Fläche $A$ . . . . .	9
1.4	Festes Volumen $V$ . . . . .	10
1.5	In einen Leiter integrierter Kondensator . . . . .	11
1.6	$\vec{k}$ steht senkrecht auf den Wellenfronten . . . . .	14
1.7	Bewegung von Wellenfronten . . . . .	14
1.8	Kugelwellen . . . . .	15
1.9	$E$ -und $B$ -Feld einer elektromagnetischen Welle. . . . .	17
1.10	Leistungsabstrahlung eines oszillierenden Dipols. . . . .	20
1.11	Linear polarisierte elektromagnetische Welle. . . . .	20
1.12	Linkszirkular polarisierte elektromagnetische Welle. . . . .	21
1.13	Schicht der Dicke $\Delta z$ des Mediums mit Dipolen. . . . .	24
1.14	Bestandteile der em. Welle im Vakuum. . . . .	29
1.15	Bestandteile der em. Welle im isotropen Medium. . . . .	29
1.16	Bestandteile der em. Welle im optisch anisotropen Medium ohne Ladung. . . . .	29
1.17	Ellipsoid der elektrischen Verschiebungsdichte . . . . .	30
1.18	a) Brechungsindexellipsoid, b) Schnitt durch den Brechungsindexellipsoid . . . . .	30
1.19	Struktur des Kalkspat-Kristalls. . . . .	31
1.20	Verlauf der optischen Achse beim Kalkspatkristall. . . . .	31
1.21	Schnitt durch den Brechungsindexellipsoid . . . . .	32
1.22	Doppelbrechung . . . . .	32
1.23	$\lambda/4$ -Plättchen . . . . .	33
1.24	Spannungsdoppelbrechung . . . . .	34
1.25	Kerr-Zelle . . . . .	35
1.26	Optische Aktivität . . . . .	36
1.27	Faraday-Drehung . . . . .	36
1.28	Flüssigkristall 1 . . . . .	37
1.29	Flüssigkristall 2 . . . . .	38
1.30	Flüssigkristall 3 . . . . .	39
1.31	Zur 3. Maxwell-Gleichung . . . . .	39
1.32	Zur 4. Maxwell-Gleichung . . . . .	40
1.33	Energiefluss durch eine Grenzfläche. . . . .	40
1.34	Einfallende, reflektierte und transmittierte em. Welle. . . . .	42
1.35	Einfallende und reflektierte em. Welle. . . . .	43

1.36	Einfallende und transmittierte em. Welle.	43
1.37	Reflexionsamplitude $R$ und Transmissionsamplitude $T$ aufgetragen über $n$ .	46
1.38	Reflexionskoeffizient $r$ und Transmissionskoeffizient $t$ aufgetragen über $n$ .	46
1.39	Umgekehrt: Em. Welle vom dickeren ins dünnere Medium.	46
1.40	Licht fällt von Medium 1 in Medium 2 ein. Die so genannte Einfallsebene sei hier als $x$ - $z$ -Ebene gewählt.	48
1.41	$R$ und $T$ bei $n_1 < n_2$	49
1.42	$R$ und $T$ bei $n_1 > n_2$	49
1.43	$r$ und $t$ bei $n_1 < n_2$	49
1.44	$r$ und $t$ bei $n_1 > n_2$	49
1.45	Brewster-Winkel	50
1.46	Verhalten der Welle im Metall.	51
1.47	Das Fermat'sche Prinzip	52
1.48	Der Weg des Lichtes an der Grenzfläche zwischen zwei Medien.	52
1.49	Einschränkungen der geometrischen Optik	52
1.50	Die Wellenfront wird in infinitesimalen Abständen gebrochen.	53
1.51	Optischer Weg $\Delta_s$ .	53
1.52	Luftspiegelung auf einer heißen Straße.	53
1.53	Eine Luftspiegelung	54
1.54	Brechung in der Atmosphäre	54
1.55	Optische Abbildungen	54
1.56	Bilderzeugung beim ebenen Spiegel.	55
1.57	Konstruktion der Abbildung eines Pfeils am ebenen Spiegel.	55
1.58	Mensch vor einem Spiegel	56
1.59	Abbildung im Spiegel	56
1.60	Mehrfachbilder, die durch zwei ebene Spiegel erzeugt werden.	56
1.61	Schematische Darstellung einer Lochkamera.	57
1.62	Abbildung einer beleuchteten Schrifftafel mit Hilfe einer Lochkamera bei verschiedenen Lochdurchmessern.	57
1.63	Sphärischer Hohlspiegel mit Brennpunkt $F$ , Kugelmittelpunkt $M$ und Brennweite $f = \overline{OF} \approx R/2$ .	57
1.64	Abbildung eines Punktes $A$ auf der Achse in einen Bildpunkt $B$ , der ebenfalls auf der Spiegelachse liegt.	58
1.65	Zur geometrischen Konstruktion eines Punktes des Bildes $B$ eines beliebigen, aber achsen-nahen Punktes $A$ .	59
1.66	Elliptischer Hohlspiegel	59
1.67	Der Ablenkwinkel $\phi_A$ in Abhängigkeit vom Einfallswinkel $\theta_1$ . Für $\theta_1 = 60^\circ$ hat $\phi_A$ ein Minimum. Hier ist $d\phi_A/d\theta_1 = 0$ . Für Einfallswinkel, die etwas größer oder etwas kleiner als $60^\circ$ sind, ist der Ablenkwinkel näherungsweise gleich.	60
1.68	Erklärung der Entstehung von Haupt- und Nebenregenbogen.	60
1.69	Prisma	60
1.70	Prisma	62
1.71	Zur Definition der Brennweite einer sphärisch gekrümmten Grenzfläche.	62
1.72	Geometrische Strahlenkonstruktion bei der Abbildung eines Gegenstandes $A$ durch eine sphärische Grenzfläche.	62
1.73	Zur Herleitung von (1.7.9).	63
1.74	Dünne Linse	64

1.75	Zur Erklärung von $x_a$ und $x_b$ .	65
1.76	Zeichnerische Konstruktion der Abbildung durch eine dünne Linse.	65
1.77	Zur Definition der Hauptebenen einer dicken Linse.	66
1.78	Beispiel eines optischen Systems aus zwei dicken Linsen. Es ist $F_{b1}$ der Fokus, also das Bild von $L_1$ und $F_b$ der bildseitige Brennpunkt des Linsensystems.	67
1.79	Beispiel eines optischen Systems aus zwei Linsen.	67
1.80	Chromatische Aberration.	68
1.81	Achromat.	68
1.82	a) Koma beim Durchlaufen eines Parallellichtbündels durch eine schiefe Linse. Die einzelnen Teilbündel führen zu räumliche verschiedene Brennpunkten $F_i$ . b) Bei der Abbildung einer Punktes $A$ außerhalb der Symmetrieachse führen die verschiedenen Teilbündel zu unterschiedlichen Bildpunkten $B_i$ .	68
1.83	a),b) Astigmatismus bei der Abbildung eines schrägen Lichtbündels. a) Perspektivische Ansicht; b) Lichtbündeldurchschnitt in der Ebene im Abstand $x_1, b_M, x_2, b_S, x_3$ .	69
1.84	Zwei überlagerte Kugelwellen.	70
1.85	Die Interferenz im Punkt $P$ .	71
1.86	Näherung für $\overline{S_1P} \approx \overline{S_2P} \gg d$ .	71
1.87	Zur Intensitätsverteilung bei Interferenz zweier Punktquellen. Quelle: Wikipedia	71
1.88	Intensitätsverteilung bei Anordnung aus Abbildung 1.87.	71
1.89	Michelson Interferometer	72
1.90	Transmission des Michelson-Interferometers	73
1.91	Vielstrahl-Interferenz	74
1.92	Transmission bei Vielstrahl-Interferenz	76
1.93	Fabry-Pérot-Interferometer	76
1.94	Transmission beim FPI	77
1.95	Halbwertsbreite beim FPI	78
1.96	Zwei Wellenpakete von unterschiedlichen Quellen	79
1.97	Partielle Kohärenz.	79
1.98	Ein Strahl wird über einen Strahlteiler geteilt und mittels eines Spiegels wieder auf den selben Punkt auf einem Schirm projiziert. Rechts sind die entstehenden Interferenzbilder zu sehen.	80
1.99	Young'scher Doppelspaltversuch mit zwei Quellen.	80
1.100	Kontrastverteilung beim Versuch aus Abbildung 1.99.	80
1.101	Doppelspalt mit vielen Quellen	81
1.102	Kontrast beim Young'schen Doppelspaltversuch mit vielen Quellen.	81
1.103	Kontrastabnahme	81
1.104	Das Kohärenzvolumen.	82
1.105	Frauenhofer-Beugung	82
1.106	Zur Herleitung von 1.9.1.	83
1.107	Die Funktion $(\sin(x)/x)^2$ .	84
1.108	Die Streuintensität $I(\theta)$ für $d < \lambda$ und $D = N \cdot d = 100\lambda$ . Die Fußpunktsbreite $\Delta\alpha$ zwischen den Nullstellen von $I(\theta)$ ist $\Delta\theta = 2\lambda/(N \cdot d)$ .	84
1.109	Beugung am Spalt.	85
1.110	Intensitätsverteilung $I(\theta)$ bei der Beugung am Spalt für verschiedene Werte des Verhältnisses $\frac{b}{\lambda}$ von Spaltbreite $b$ zu Wellenlänge $\lambda$ .	85
1.111	Ringförmige Beugungsstruktur	86
1.112	Beugung am Wassertropfen	86

1.113„Heiligenschein“ um den eigenen Schatten . . . . .	87
1.114Beugungsgitter aus $N$ parallelen Spalten, das senkrecht von einer ebenen Lichtwelle beleuchtet wird. . . . .	87
1.115Beugung am Gitter . . . . .	88
1.116Optisches Reflexions-Beugungsgitter. . . . .	89
1.117Gittermonochromator (Ph.D. = Photodetektor). . . . .	89
1.118Gauss-Glocke . . . . .	92
1.119Fourier-transformation am Beispiel einer Gauss-Glocke . . . . .	92
1.120Zur Idee für die Rechnung zur Umkehrung der FT. . . . .	95
2.1 Bei verschiedenen Gasen steigt der Druck bei steigender Temperatur verschieden schnell. . . . .	102
2.2 Durch einen beweglichen Kolben können Volumen $V$ und Druck $p$ variiert werden. . . . .	102
2.3 Die Hyperbeln bei $T = \text{konst.}$ heißen Isothermen. . . . .	103
2.4 Die Geraden bei $p = \text{konst.}$ heißen Isobaren. . . . .	103
2.5 Die Geraden bei $\bar{V} = \text{konst.}$ heißen Isochoren. . . . .	103
2.6 „Reale Gase verhalten sich unterschiedlich“ . . . . .	103
2.7 Toricelli’sches U-Rohr. . . . .	104
2.8 Eine Masse $M_L$ übt auf ein Luftvolumen Druck aus. . . . .	104
2.9 Abnahme des Drucks bei zunehmender Höhe. . . . .	105
2.10 Bei Flüssigkeiten nimmt der Druck linear ab. . . . .	105
2.11 Wechselwirkungspotential zweier starrer Kugeln mit Radius $r_0$ . . . . .	106
2.12 Zur Herleitung von 2.3.5. . . . .	106
2.13 Durch geschicktes Wechseln des Koordinatensystems ergibt sich die Vereinfachung $v'_y = 0$ . . . . .	108
2.14 Maxwell-Boltzmann’sche Geschwindigkeitsverteilung mit wahrscheinlichster Geschwindigkeit $v_w$ , mittlerer Geschwindigkeit $\bar{v} = \langle v \rangle$ (welche die Fläche unter der Kurve in gleiche Hälften 1 und 2 teilt) und die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat $\sqrt{v^2} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ . . . . .	110
2.15 Stoßparameter $b$ und Stoßquerschnitt $\sigma$ bei Stößen zwischen harten Kugeln mit Radien $r_1$ und $r_2$ . . . . .	111
2.16 Skizze des Eisenkerns . . . . .	111
2.17 a) Bahn eines gestreuten Teilchens mit mittlerer freier Weglänge $\Lambda$ . b) Histogramm der Längenverteilung zwischen zwei Stößen. . . . .	112
2.18 Die Teilchen $A$ und $B$ in der Kammer sind durch eine herausnehmbare Trennwand getrennt. . . . .	113
2.19 Durch die linke Öffnung gelangen kontinuierlich Teilchen in die Kammer, rechts strömen sie wieder hinaus. . . . .	113
2.20 Zur Herleitung der Diffusionsgleichung. Linearisierung von $n$ in einer kleinen Umgebung von $x_0$ . . . . .	113
2.21 Zur Herleitung der Diffusionsgleichung. . . . .	114
2.22 Zur Herleitung der Diffusionsgleichung. . . . .	114
2.23 Verteilung diffundierende Teilchen zu verschiedenen Zeiten. . . . .	117
2.24 „random walk“. . . . .	118
2.25 Kompressionsfaktor in Abhängigkeit vom Druck bei Wasserstoff und Stickstoff. . . . .	119
2.26 Gas, welches isotherm komprimiert wird. . . . .	121
2.27 Beobachtete Isothermen bei der Kompression eines realen Gases. . . . .	121
2.28 Die Endpunkte des „Plateaus“ liegen auf einer Glockenkurve. . . . .	122
2.29 Van-der-Waals Isothermen in der Nähe vom kritischen Punkt. Der Koexistenzbereich ist schwarz angedeutet. . . . .	122

2.30	Van-der-Waals Isothermen, berechnet mit der van-der-Waals-Gleichung und der tatsächliche Verlauf (gestrichelt).	124
2.31	Auf Gas mit dem Molvolumen $\bar{V}$ wird über einen Kolben Druck ausgeübt.	126
2.32	Freiheitsgrade einer Kugel	127
2.33	Freiheitsgrade eines zweiatomigen Moleküls.	127
2.34	Die Atome schwingen zueinander.	127
2.35	Temperaturverlauf der molaren Wärmekapazität von Helium, $N_2$ und Stickstoffdioxid $NO_2$ .	128
2.36	Temperaturverlauf der spezifischen Wärme pro Mol $C_V$ von molekularem Wasserstoff ( $H_2$ ). Oberhalb von ca. 3200K dissoziiert das Molekül.	128
2.37	Modell eines Festkörpers mit Federn.	129
2.38	Qualitativer Verlauf der Temperaturabhängigkeit der molaren Wärmekapazität verschiedener Festkörper.	129
2.39	Isothermen und Adiabaten in einem $p$ - $V$ -Diagramm	131
2.40	Flüssigkristalle	131
2.41	Die Änderung der Temperatur und des Volumens von Eis	132
2.42	Potential $V$ der Moleküle im Eiskristall. $r$ ist der Molekülabstand.	132
2.43	Ordnungsparameter (hier $\bar{V}$ ) in Abhängigkeit von $T$ beim Phasenübergang 1. Ordnung.	133
2.44	Molare Wärmekapazität in Abhängigkeit von $T$ beim Phasenübergang 1. Ordnung.	133
2.45	Ordnungsparameter (hier $\bar{V}$ ) in Abhängigkeit von $T$ beim Phasenübergang 2. Ordnung.	134
2.46	Molare Wärmekapazität in Abhängigkeit von $T$ beim Phasenübergang 2. Ordnung.	134
2.47	Phasendiagramm	134
2.48	Prozesse, die zum Gleichgewicht streben	136
2.49	Carnotmaschine	137
2.50	Carnotprozess	137
2.51	Carnot- und Wundermaschine	139
2.52	Reversibler Prozess	140
2.53	Irreversibler Prozess	141
2.54	Carnot-Prozess	141
2.55	Reversibler Gesamtprozess - Irreversibler Einzelprozess	142
2.56	Thermischer Kontakt zwischen zwei Körpern	143
2.57	Irreversibler Prozess der Diffusion	144
2.58	Eine Feder wird um $s$ ausgelenkt und somit gespannt.	145
2.59	Gasfeder bestehend aus eine Zylinder, in den in Kolben gedrückt wird.	146
2.60	Isotherme und adiabatische Prozesse haben unterschiedliche Energiebilanzen.	146
2.61	Die $x$ - $E$ -Ebene ist die Ebene der Gleichgewichtszustände. Wir betrachten die Prozesse 1 und 2.	152
2.62	Das Gesamtsystem ist isoliert und mit einer inneren Beschränkung versehen, welche Energieaustausch verhindert.	152
3.1	Koordinatentransformation	157
3.2	Transformation zweier Koordinatensysteme.	160
3.3	Michelson-Interferometer	161
3.4	$\sinh(\varphi)$ (rot), $\cosh(\varphi)$ (blau) und $\tanh(\varphi)$ (grün).	163
3.5	Zu kollinearen Geschwindigkeiten	164
3.6	Verhalten der addierten Geschwindigkeit nach Galilei (rot) und nach Einstein (grün).	165
3.7	Raum-Zeit-Diagramm	166
3.8	Weltlinie mit Längenelement $dl$ .	168

4.1	Zwei Punkte samt verschiedener verbindender Bahnen. . . . .	174
4.2	Tangentenvektor $\vec{q}$ an die Bahn $\mathcal{C}$ . . . . .	175
4.3	Schaubild einer Zykloide, gegeben durch die Bewegung eines Punktes auf dem Umfang eines abrollenden Rades mit Radius $a$ . . . . .	181
4.4	Geladenes Teilchen im em. Feld . . . . .	184
4.5	Mendelnde Masse $M$ . . . . .	187
4.6	Potential der Masse $M$ . . . . .	187
4.7	Typische Potentiallandschaft mit den vier wichtigen Bahnentypen zu verschiedenen Energiezuständen. . . . .	188
4.8	Typisches Potential aus Abschnitt 4.3.2.1. . . . .	190
4.9	Effektives Potenzial, z.B. beim Kepler-Problem. . . . .	193
4.10	Starres Pendel . . . . .	195
4.11	Zwei starre, gekoppelte Pendel . . . . .	195
4.12	Eine Perle, die auf einen kreisförmigen Draht aufgefädelt ist, der sich um eine Achse dreht, die durch seinen Mittelpunkt geht. . . . .	196
4.13	Beispiel für eine nicht global invertierbare Koordinatentransformation. . . . .	202
4.14	$f(\vec{x}) = 0$ , $x_i = g_i(q_1, q_2)$ , $i = 1, 2, 3$ . . . . .	204
4.15	Unter Zwangsbedingungen eingeschränkter Konfigurationsraum. $F_1(\vec{x}) = 0$ , $F_2(\vec{x}) = 0$ , $x_i = g_i(\vec{q})$ , $i = 1, 2, 3$ . . . . .	204
4.16	Das Potential $U$ ist invariant gegen Verschiebungen auf der $y$ -Achse. . . . .	207
4.17	Drehung um den infinitesimalen Winkel $d\alpha$ . . . . .	210
4.18	Phasenfluss des Pendels bei verschiedenen Anfangswerten (oben) und zugehöriges Potential (unten). . . . .	213
4.19	Der Bereich $D_0$ wird in der Zeit $t$ auf den Bereich $D(t)$ mit selbem Volumen abgebildet. . . . .	214
4.20	Diskussion des Potentials (rot) des anharmonischen Oszillators. Bei der Gesamtenergie $E'$ kann sich die Auslenkung nur zwischen $x_-$ und $x_+$ bewegen. . . . .	223

# Tabellenverzeichnis

1.1	Kerr-Konstanten einiger wichtiger Materialien. . . . .	35
1.2	Verdet-Konstanten einiger wichtiger Materialien. (* $\lambda = 578\text{nm}$ , $1013\text{hPa}$ ) . . . . .	37
2.1	Kritische Temperaturen $T_K$ , kritischer Druck $p_K$ , van-der-Waals-Konstanten $a$ , $b$ , maximale Inversionstemperatur $T_I$ und Siedetemperatur $T_S$ für einige Gase. . . . .	123
2.2	Spezifische Wärmekapazität $c$ bei $20^\circ\text{C}$ und $1013,25\text{ hPa}$ , spezifische Schmelzwärme $\lambda_S$ und spezifische Verdampfungswärme $\lambda_V$ einiger Stoffe. . . . .	130
4.1	Vergleich der verschiedenen mechanischen Konzepte. . . . .	221