UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Andrey Moskalenko
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/16S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2016 - Übungsblatt 9
Ausgabe: 20.06.2016, Abgabe: 27.06.2016, Übungen: 30.06./1.07.2016

Aufgabe 26: Verschränkung und lokale Operationen

Es sei der folgende Zustand im Raum $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ gegeben:

$$|\psi\rangle = \cos\alpha\,|00\rangle + \sin\alpha\,|11\rangle\,.$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Von-Neumann-Entropie $S(\rho_A)$ von $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\,|\psi\rangle\langle\psi|$. Plotten Sie $S(\rho_A)$ als Funktion von α für $\alpha \in [0,\pi]$

b) (1 Punkt) Betrachten Sie die folgende Transformation $U = U_A \otimes \mathbb{1}_B$ mit $U_A = \sigma_x$. Berechnen Sie explizit die Von-Neumann-Entropie von ρ'_A, die dem Zustand $|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle$ entspricht.

c) (3 Punkte) Betrachten Sie die folgende POVM auf $\mathcal{H}_A$ mit $F_0 = \varepsilon\,|\phi\rangle\langle\phi|$ und $F_1 = \mathbb{1}_A - F_0$, wobei $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A + |1\rangle_A\right)$ und $0 < \epsilon \leq 1$. Es wird eine selektive Messung mit F_1 durchgeführt, so dass $\rho''_A = M_1\rho_A M_1^\dagger/\mathrm{Tr}(F_1\rho_A)$, wobei $M_i = \sqrt{F_i}$. Berechnen Sie $S(\rho''_A)$ und plotten Sie sie in Anhängigkeit von ε für $\alpha = \pi/6$.

Aufgabe 27 : Nielsen-Theorem

Alice und Bob besitzen einen gemeinsamen Quantenzustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, den sie mittels lokaler Operationen und klassischer Kommunikation (LOCC) manipulieren dürfen. Die Von-Neumann-Entropie $S(\rho_A^\psi)$ mit $\rho_A^\psi = \mathrm{Tr}_B\,|\psi\rangle\langle\psi|$ ist ein Maß für die Verschränkung von $|\psi\rangle$.
Das Nielsen-Theorem [Nielsen, Phys. Rev. Lett. **83**, 436 (1999)] besagt, dass eine Transformation zu einem anderen reinen Quantenzustand $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit Wahrscheinlichkeit 1 genau dann möglich ist, wenn die Eigenwerte $(\lambda_1^\psi \geq \lambda_2^\psi \geq \cdots \geq \lambda_N^\psi)$ von ρ_A^ψ durch die Eigenwerte $(\lambda_1^\phi \geq \lambda_2^\phi \geq \cdots \geq \lambda_N^\phi)$ von ρ_A^ϕ majorisiert werden, d.h.

$$\sum_{n=1}^{k} \lambda_n^\psi \leq \sum_{n=1}^{k} \lambda_n^\phi \quad \forall k \in \{1,\ldots,N\}.$$

a) (3 Punkte) Betrachten Sie den Zustand

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{|0\rangle_A - |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle_B + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|2\rangle_A \otimes |2\rangle_B\,.$$

Alice führt nun eine projektive Messung mit den Projektionsoperatoren $P_0 = |0\rangle_{A\,A}\langle 0| + |2\rangle_{A\,A}\langle 2|$ und $P_1 = \mathbb{1} - P_0 = |1\rangle_{A\,A}\langle 1|$ aus. Welche Zustände $|\psi_0\rangle$ und $|\psi_1\rangle$ werden dadurch mit welcher Wahrscheinlichkeit erzeugt? Bestimmen Sie die Eigenwerte von ρ_A^ψ, $\rho_A^{\psi_0}$ und $\rho_A^{\psi_1}$ und die zugehörigen

Von-Neumann-Entropien. Entscheiden Sie mit Hilfe des Nielsen-Theorems, ob eine Transformation $|\psi\rangle \mapsto |\psi_{0,1}\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit 1 mittels LOCC möglich ist.

b) (3 Punkte) Betrachten Sie nun die Zustände

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{15}{32}}\left[\,|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\,\right] + \frac{1}{\sqrt{32}}\left[\,|2\rangle_A \otimes |2\rangle_B + |3\rangle_A \otimes |3\rangle_B\,\right],$$

$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}\,|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{8}}\left[\,|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B\,\right].$$

Ist $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle$ oder $|\phi\rangle \mapsto |\psi\rangle$ mittels LOCC und mit Wahrscheinlichkeit 1 möglich? Ist die Abbildungen $|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle \mapsto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$ auf diese Art möglich? Dabei ist

$$|\chi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}\,|\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + \frac{1}{2}\,|\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B$$

ein weiterer zwischen A und B verschränkter Zustand.

Aufgabe 28 : Verschränkung von drei Teilsystemen (*tripartite entanglement)*

a) (2 Punkte) Betrachten Sie den Greenberger-Horne-Zeilinger Zustand

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|000\rangle + |111\rangle)\,.$$

Zeigen Sie, dass dieser Zustand im Bezug auf jede zwei Teilsysteme einen gemischten Zustand darstellt, der nicht verschränkt ist. Überzeugen Sie sich dann, dass bei einer projektiven Messung an einem der Teilsysteme in einem der Zustände $\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$ die Verschränkung auch verloren geht (der resultierende Zwei-Qubit-Zustand nicht verschränkt ist).

b) (2 Punkte) Wie sieht es beim sogenannten W-Zustand

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$$

aus?