UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Andrey Moskalenko
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/16S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2016 - Übungsblatt 8
Ausgabe: 13.06.2016, Abgabe: 20.06.2016, Übungen: 23./24.06.2016

Aufgabe 25: Gedämpfter harmonischer Oszillator

Betrachten wir einen harmonischen Oszillator $H_0 = \omega\, a^\dagger a$ ($\hbar = 1$), der mit einem Reservoir wechselwirkt. Wenn das Reservoir nur im Grundzustand ist, kann der harmonische Oszillator nur von einem angeregten Zustand zum nächsten tiefer liegenden Zustand durch Emission eines Photons abgeregt werden und kann keine Photonen absorbieren. Deshalb kann die Dämpfung des Oszillators durch den Lindblad-Operator $L = \sqrt{\Gamma} a$ beschrieben werden, wo Γ die Rate ist, mit welcher der Oszillator vom ersten angeregten Zustand ($n = 1$) zum Grundzustand übergeht ($n = 0$).

a) (1 Punkt) Stellen Sie die Lindblad-Gleichung für den harmonischen Oszillator auf. Gehen Sie zum Wechselwirkungsbild mit H_0 über. Wie sieht die Lindblad-Gleichung für den Dichteoperator im Wechselwirkungsbild ρ_I aus?

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Vernichtungsoperators im Wechselwirkungsbild $a_I(t)$, wobei $a_I(t=0) = a$. Finden Sie die Dynamik der Erwartungswerte $\langle a\rangle(t)$ und $\langle a^\dagger a\rangle(t) \equiv \langle n\rangle(t)$.

c) (4 Punkte) Betrachten wir die Funktion

$$X(x, y, t) = \mathrm{Tr}[\rho_I(t)\mathrm{e}^{xa^\dagger}\mathrm{e}^{-ya}],$$

wo x und y komplexe Zahlen sind. Benutzen Sie die Lindblad-Gleichung für $\dot{\rho}_I$, um eine Differenzialgleichung für $X(\lambda, \lambda^*, t)$ aufzustellen und zu lösen. Die Lösung soll in der Form

$$X(\lambda, \lambda^*, t) = X(\lambda', \lambda'^*, 0)$$

sein, wo λ' eine Funktion von λ, Γ und t ist. Was ist die Funktion $\lambda'(\lambda, \Gamma, t)$?
Hinweis: Nutzen Sie die folgenden Kommutatorrelationen:

$$[a, M(a^\dagger, a)] = \frac{\partial M(a^\dagger, a)}{\partial a^\dagger}, \qquad [M(a^\dagger, a), a^\dagger] = \frac{\partial M(a^\dagger, a)}{\partial a},$$

d) (4 Punkte) Nehmen wir an, dass der harmonische Oscillator sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im sogenannten “cat state” befindet:

$$|\mathrm{cat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle),$$

wo $|\alpha\rangle$ einen kohärenten Zustand bezeichnet:

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}|0\rangle.$$

α ist eine komplexe Zahl. Benutzen Sie das Ergebnis aus c), um den Dichteoperator zu einem späteren Zeitpunkt t abzuleiten. Mit welcher Rate werden die nichtdiagonalen Terme $|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2|$ und $|\alpha_2\rangle\langle\alpha_1|$ von ρ unter der Annahme $\Gamma t \ll 1$ gedämpft?