UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Andrey Moskalenko
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/16S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2016 - Übungsblatt 7
Ausgabe: 6.06.2016, Abgabe: 13.06.2016, Übungen: 16./17.06.2016

Aufgabe 23: Dekohärenz auf der Bloch-Kugel

Der Zustand eines Qubits kann immer auf der Bloch-Kugel durch den Bloch-Vektor $\mathbf{r}$ dargestellt werden,

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

wobei $\mathbf{r}$ ist ein dreidimensionaler reeller Vektor ist.

a) Nehmen wir an, das Qubit werde mit der Wahrscheinlichkeit $\tilde{p} = \frac{4}{3}p$ depolarisiert, d. h. durch einen komplett gemischten Zustand $\mathbb{1}/2$ ersetzt.

(i) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Dichte-Operator des Qubits sich durch diese Operation wie folgt verändert:

$$\rho \to \rho' = (1-p)\rho + \frac{p}{3}(\sigma_1\rho\sigma_1 + \sigma_2\rho\sigma_2 + \sigma_3\rho\sigma_3).$$

(ii) (2 Punkte) Wie verändert sich dabei der Bloch-Vektor?

b) (3 Punkte) Eine Amplituden-Dämpfung kann man z. B. bei der spontanen Emission eines angeregten Atoms beobachten. Mit der Wahrscheinlichkeit p geht das Atom in den Grundzustand $|0\rangle_Q$ über und mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ bleibt es im angeregten Zustand $|1\rangle_Q$. Die unitäre Transformation, die diesen Vorgang beschreibt, ist

$$\begin{aligned} |0\rangle_Q|0\rangle_E &\to |0\rangle_Q|0\rangle_E \\ |1\rangle_Q|0\rangle_E &\to \sqrt{1-p}|1\rangle_Q|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_Q|1\rangle_E. \end{aligned}$$

$|0/1\rangle_E$ beschreibt den Zustand der Umgebung oder hier die Anzahl der ausgestrahlten Photonen. Finden Sie die Kraus-Operatoren, die den Dichte-Operator transformieren. Was passiert mit dem Bloch-Vektor nach der Amplituden-Dämpfung?

c) (3 Punkte) Die Dekohärenz der Phase eines Qubits kann man durch die folgende unitäre Operation beschreiben:

$$\begin{aligned} |0\rangle_Q|0\rangle_E &\to |0\rangle_Q|0\rangle_E \\ |1\rangle_Q|0\rangle_E &\to \sqrt{1-p}|1\rangle_Q|0\rangle_E + \sqrt{p}|1\rangle_Q|1\rangle_E. \end{aligned}$$

p gibt die Wahrscheinlichkeit an, ob das Qubit mit der Umgebung wechselwirkt. Finden Sie die entsprechenden Kraus-Operatoren und finden Sie heraus, wie sich dabei der Bloch-Vektor transformiert.

Aufgabe 24: Entanglement witness (3 Punkte)

Ein “Entanglement witness” W is ein linear Operator auf dem Produkt-Hilbertraum $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, der nicht positiv semidifinit ist, und für alle Produktzustände $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ gilt

$$\langle\psi|W|\psi\rangle \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass der Operator $W = \mathbb{1}_4 - 2|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|$ mit $|\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B - |1\rangle_A|1\rangle_B)$ ein “Entanglement witness” ist.