UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Andrey Moskalenko
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/16S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2016 - Übungsblatt 6
Ausgabe: 30.05.2016, Abgabe: 6.06.2016, Übungen: 9./10.06.2016

Aufgabe 20: Neumark-Theorem

Beweisen Sie das Neumark Theorem:

Theorem (Neumark)**.** *Jedes POVM* $\{F_a\}, a = 1, \dots, n$ *auf* $\mathcal{H}_A$ *mit* $N = \dim \mathcal{H}_A \leq n$ *(wobei* $\operatorname{rang} F_a = 1$ *gelten soll; der Rang eines hermiteschen Operators ist gleich der Anzahl der nicht verschwindenden Eigenwerte) lässt sich als orthogonale Messung auf* $\mathcal{H}$ *mit* $\mathcal{H}_A \subseteq \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_A^\perp$ *realisieren, wobei* $\dim \mathcal{H} \geq n$*.*

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) (1 Punkt) Jedes POVM-Element F_a kann durch einen nicht-normierten Vektor $\left|\tilde{\psi}_a\right\rangle$ dargestellt werden, $F_a = \left|\tilde{\psi}_a\right\rangle \left\langle\tilde{\psi}_a\right|$. Sei $\{|i\rangle\,,\ i = 1 \dots N\}$ eine beliebige Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_A$. Zeigen Sie zunächst, dass die n-dimensionalen Vektoren $\mathbf{V}^{(i)}$ mit Komponenten $v_a^{(i)} = \left\langle i\middle|\tilde{\psi}_a\right\rangle$ orthonormiert sind, d.h. $(\mathbf{V}^{(i)})^\dagger \mathbf{V}^{(j)} = \delta_{ij}$ $(i, j = 1 \dots N)$.

b) Man kann diese Vektoren mit $n - N$ zusätzlichen Vektoren vervollständigen, damit sie zusammen eine Orthonormalbasis eines erweiterten n-dimensionalen Raums bilden. Nehmen Sie an, dass die zusätzlichen Vektoren gefunden wurden (das ist immer möglich!), d.h. wir kennen $\mathbf{V}^{(i)}$ auch für $i = N + 1 \dots n$. Sei dann $\{|i\rangle\,,\ i = N + 1 \dots n\}$ eine beliebige Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_A^\perp$ und $\left|\tilde{\psi}_a^\perp\right\rangle = \sum_{i=N+1,n} v_a^{(i)} |i\rangle \in \mathcal{H}_A^\perp$.

(i) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass damit eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ als $|u_a\rangle = \left|\tilde{\psi}_a\right\rangle + \left|\tilde{\psi}_a^\perp\right\rangle$ $(a = 1 \dots n)$ gewählt werden kann.

(ii) (3 Punkte) Zeigen Sie schließlich, dass die orthogonale Messung $P_a = |u_a\rangle \langle u_a|$ auf $\mathcal{H}$ dem POVM-Element F_a mit zugehörigem Messoperator $M_a = \sqrt{F_a}$ auf $\mathcal{H}_A$ entspricht.

Aufgabe 21: Optimale Messungen

Alice kann an Bob folgende Zustände schicken: $|\psi_1\rangle = |0\rangle$, $|\psi_2\rangle = -\sin\theta\,|0\rangle + \cos\theta\,|1\rangle$, und $|\psi_3\rangle = -\sin\theta\,|0\rangle - \cos\theta\,|1\rangle$, wobei $\theta = \pi/6$. Nun schickt sie diese Zustände mit Wahrscheinlichkeit jeweils 1/3. Bob misst die empfangenen Zustände und muss sich bei jeder Messung für eine der drei Zustände von Alice entscheiden. Dabei macht er in diesem Fall unausweichlich Fehler. Als Fehler bezeichnen wir ein Ereignis, wenn Alice einen Zustand schickt und die Messung, die Bob durchführt, zur einer Wahl führt, die mit dem Zustand von Alice nicht stimmt.

a) (4 Punkte) Welche orthogonale Messung minimiert die Fehlerwahrscheinlichkeit?

b) (2 Punkte) Können Sie eine POVM mit drei Elementen konstruieren, bei der diese Wahrscheinlichkeit kleiner ist?

Aufgabe 22: Singulett-Zustand

Betrachten wir den Singulett-Zustand von zwei Spins 1/2:

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2).$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)|\Psi_-\rangle = 0$.

b) (1 Punkt) Was bekommt man für $\langle\Psi_-|\boldsymbol{\sigma}_{1(2)}|\Psi_-\rangle$?

c) (2 Punkte) Benutzen Sie das Ergebnis aus a) und b) um zu zeigen, dass

$$\langle\Psi_-|(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1)(\hat{\mathbf{m}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)|\Psi_-\rangle = -\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{m}},$$

wo $\hat{\mathbf{n}}$ und $\hat{\mathbf{m}}$ zwei dreidimensionale Einheitsvektoren sind.