UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Andrey Moskalenko
https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/16S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2016 - Übungsblatt 11
Ausgabe: 4.07.2016, Abgabe: 11.07.2016, Übungen: 14.07./15.07.2016

Aufgabe 32 : Concurrence (3 Punkte)

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Definitionen der *Concurrence*, $C := \sqrt{2\left[1 - \mathrm{Tr}(\rho_A^2)\right]}$ und $C := |\langle\psi|\,\theta\,|\psi\rangle|$ für reine Zustände in einem bipartiten Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$. Dabei ist die Wirkung des Operators θ auf einen Zustand $|\psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle$ gegeben durch $\theta\,|\psi\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y\,|\psi\rangle^* = -\alpha_{11}^*\,|00\rangle + \alpha_{10}^*\,|01\rangle + \alpha_{01}^*\,|10\rangle - \alpha_{00}^*\,|11\rangle$ und $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\,|\psi\rangle\langle\psi|$ ist die Dichtematrix im Teilsystem A.

Aufgabe 33 : Eigenschaften der Von-Neumann-Entropie

Die relative Entropie zweier Dichtematrizen ρ und σ ist definiert als

$$S(\rho|\sigma) = \mathrm{Tr}[\rho(\log\rho - \log\sigma)].$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie $S(\rho|\sigma) \geq 0$.
Hinweis: Benutzen Sie, dass die Funktion $f(x) = -x\log x$ konkav ist, d.h. $f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \geq \sum_i \lambda_i f(x_i)$ für $\lambda_i > 0$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$ als auch $f(y) - f(x) \leq (y-x)f'(x)$, um zu zeigen, dass $\mathrm{Tr}\left[f(\hat{B}) - f(\hat{A})\right] \leq \mathrm{Tr}\left[(\hat{B} - \hat{A})f'(\hat{A})\right]$ für zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass $S(\rho) \leq \log d$ gilt, wenn ρ eine $d \times d$-Matrix ist.

c) (1 Punkt) Nutzen Sie a) um die Subadditivität der Von-Neumann-Entropie zu zeigen,

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B).$$

Hinweis: Betrachten Sie die relative Entropie der Dichtematrizen $\rho_A \otimes \rho_B$ und ρ_{AB}.

d) (2 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe von c) die Konkavität der Von-Neumann-Entropie, d.h.

$$S\left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right) \geq \sum_i \lambda_i S(\rho_i)$$

für $\lambda_i > 0$ und $\sum_i \lambda_i = 1$.
Hinweis: Verwenden sie die Subadditivität bezüglich des Zustands $\rho_{AB} = \sum_i \lambda_i\,(\rho_i)_A \otimes (|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)_B$, wobei $(\rho_i)_A \equiv \rho_i$ (nicht mit der Bezeichnung für die reduzierte Dichtematrix verwechseln!) und $\{|\psi_i\rangle_B\}$ eine beliebige orthonormierte Basis ist.

e) (1 Punkt) Zeigen Sie die Araki-Lieb-Ungleichung (Dreiecksungleichung),

$$S(\rho_{AB}) \geq |S(\rho_A) - S(\rho_B)|.$$

Hinweis: Erweitern Sie das System auf ABC mit einem reinen Zustand $|\psi\rangle$, sodass $\rho_{AB} = \mathrm{Tr}_C\,|\psi\rangle\langle\psi|$. Wenden Sie dann die Subadditivität auf ρ_{BC} und ρ_{AC} an.

Aufgabe 34 : Nicht erweiterbare Produktbasis (unextendible product basis, UPB)

Eine UPB ist ein Satz von orthogonalen Produktzuständen $\{|\psi_i\rangle\,; i = 1, \ldots, n\}$ des (für unsere Betrachtungen) bipartiten Hilbertraums $\mathcal{H} = \mathcal{H_A} \otimes \mathcal{H_B}$, zu dem sich kein weiterer Produktzustand finden lässt, der zu allen Vektoren der UPB orthogonal ist. Die Dimension von $\mathcal{H}$ sei N. Für $n < N$ hat die Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{N-n}\left(\mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)$$

ihren Träger im orthogonalen Komplement der UPB.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass ρ verschränkt ist.

Hinweis: Zeigen Sie zum Beispiel, dass für jede separable Dichtematrix $\rho_S = \sum_i p_i \rho_{A,i} \otimes \rho_{B,i}$ mit $p_i > 0$, $\sum_i p_i = 1$ die Ungleichung $P_{\mathrm{UPB}} \rho_S P_{\mathrm{UPB}} \neq 0$ gilt. Dabei ist $P_{\mathrm{UPB}} = \sum_{i=1}^{n} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die partiell Transponierte von ρ positiv ist.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Zustände [Bennett *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 5385 (1999)]

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= |0\rangle_A \otimes \frac{|0\rangle_B - |1\rangle_B}{\sqrt{2}}, \\
|\psi_2\rangle &= \frac{|0\rangle_A - |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes |2\rangle_B\,, \\
|\psi_3\rangle &= |2\rangle_A \otimes \frac{|1\rangle_B - |2\rangle_B}{\sqrt{2}}, \\
|\psi_4\rangle &= \frac{|1\rangle_A - |2\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle_B\,, \\
|\psi_5\rangle &= \frac{(|0\rangle_A + |1\rangle_A + |2\rangle_A) \otimes (|0\rangle_B + |1\rangle_B + |2\rangle_B)}{3}
\end{aligned}$$

für $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = 3$ eine UPB bilden.

Bemerkung: Damit ist die Existenz eines verschränkten PPT-Zustandes für $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = 3$ gezeigt. Für $\dim \mathcal{H}_A \dim \mathcal{H}_B \leq 6$ gibt es keine verschränkten PPT-Zustände, also auch keine UPB mit $n < N$.