

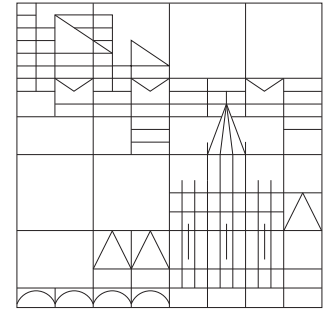
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard

Dr. Andrey Moskalenko

<https://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/16S-QI>



## Quanteninformatiionstheorie

### Sommersemester 2016 - Übungsblatt 1

Ausgabe: 18.04.2016, Abgabe: 25.04.2016, Übungen: 28./29.04.2016

#### Aufgabe 4 : Grenzwert (1 Punkt)

Zeigen Sie

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \log p = 0.$$

#### Aufgabe 5 : Konkavität der Shannon-Entropie

a) (2 Punkte) Zeigen Sie die Konkavität der Shannon-Entropie, d.h. beweisen Sie für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $p_1$  und  $p_2$  über dasselbe Alphabet  $X$ , dass die Shannon-Entropie  $H(p) = -\sum_{x \in X} p(x) \log p(x)$  für die gemischte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p$ , gegeben durch  $p(x) = wp_1(x) + (1-w)p_2(x)$ , die Ungleichung

$$H(p) \geq wH(p_1) + (1-w)H(p_2) \quad (1)$$

erfüllt, wobei  $0 \leq w \leq 1$ . Sie dürfen verwenden, dass eine Funktion mit nicht positiver zweiter Ableitung konkav ist.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (1) nur gilt, wenn  $p_1 = p_2$  oder  $w \in \{0, 1\}$ .

c) (2 Punkte) Wir betrachten nun ein Bit, d. h.  $X = \{0, 1\}$ . Stellen Sie  $H$  als Funktion der Wahrscheinlichkeit  $p(0)$  grafisch dar. Veranschaulichen Sie nun die Konkavität der Shannon-Entropie, indem Sie die Werte für  $H(wp_1 + (1-w)p_2)$  und  $wH(p_1) + (1-w)H(p_2)$  für ein  $w \in (0, 1)$  und zwei Wahrscheinlichkeiten  $0 < p_1(0) < p_2(0) < 1$  einzeichnen.

#### Aufgabe 6 : Shannon-Entropie für zwei Ereignisse

Sei  $p$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Botschaft der Länge 2 wobei das erste Zeichen,  $x$ , aus dem Alphabet  $X$  und das zweite,  $y$ , aus dem Alphabet  $Y$  stammt. Die Zeichenkombination  $x, y$  tritt mit der Wahrscheinlichkeit  $p(x, y)$  auf. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $p_x$  und  $p_y$  für die einzelnen Symbole sind dann gegeben durch  $p_x(x) = \sum_{y \in Y} p(x, y)$  und  $p_y(y) = \sum_{x \in X} p(x, y)$ .

a) (1 Punkt) Beweisen Sie  $H(p) \geq H(p_x), H(p_y)$ .

b) (1 Punkt) Wann gilt  $H(p) = H(p_x)$ ?

### **Aufgabe 7 : Shannon-Theorem I** (2 Punkte)

Basierend auf der Buchstabenhäufigkeit (<https://de.wikipedia.org/wiki/Buchstabenhäufigkeit>) schätzen Sie ab, um welchen Faktor man eine lange Datei mit einem deutschsprachigen Text komprimieren kann.

*Hinweis: Übertragen Sie die Tabelle mit den Häufigkeitsangaben in eine Excel-Datei (oder verwenden Sie eine ähnliche Software), um die anschließende Rechnung durchzuführen.*