UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Adrian Auer
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/14S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2014 - Übungsblatt 5
Ausgabe: 03.06.2014, Abgabe: 10.06.2014, Übungen: 12./13.06.2014

Aufgabe 19: Bell-Zustand

Kann der Bell-Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

als ein Produkt-Zustand dargestellt werden? Was ist die Schmidt-Zahl (oder der Schmidt-Rang) dieses Zustands?

Aufgabe 20: Dekohärenz auf der Bloch-Kugel (schriftlich)

Der Zustand eines Qubits kann immer auf der Bloch-Kugel durch den Bloch-Vektor $\vec{r}$ dargestellt werden,

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}),$$

wobei $\vec{r}$ ist ein dreidimensionaler reeller Vektor ist.

a) (2 Punkte) Nehmen wir an, das Qubit werde mit der Wahrscheinlichkeit p depolarisiert, d. h. durch einen komplett gemischten Zustand $\mathbb{1}/2$ ersetzt. Die Dichte-Operator des Qubits verändert sich durch diese Operation:

$$\rho \to \rho' = (1-p)\rho + \frac{p}{3}(\sigma_1 \rho \sigma_1 + \sigma_2 \rho \sigma_2 + \sigma_3 \rho \sigma_3).$$

Wie verändert sich dabei der Bloch-Vektor?

b) (3 Punkte) Eine Amplituden-Dämpfung kann man z. B. bei der spontanen Emission eines angeregten Atoms beobachten. Mit der Wahrscheinlichkeit p geht das Atom in den Grundzustand $|0\rangle_Q$ über und mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ bleibt es im angeregten Zustand $|1\rangle_Q$. Die unitäre Transformation, die diesen Vorgang beschreibt, ist

$$\begin{aligned} |0\rangle_Q|0\rangle_E &\to |0\rangle_Q|0\rangle_E \\ |1\rangle_Q|0\rangle_E &\to \sqrt{1-p}|1\rangle_Q|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_Q|1\rangle_E. \end{aligned}$$

$|0/1\rangle_E$ beschreibt den Zustand der Umgebung oder hier die Anzahl der ausgestrahlten Photonen. Finden Sie die Kraus-Operatoren, die den Dichte-Operator transformieren. Was passiert mit dem Bloch-Vektor nach der Amplituden-Dämpfung?

c) (3 Punkte) Die Dekohärenz der Phase eines Qubits kann man durch die folgende unitäre Operation beschreiben:

$$\begin{aligned} |0\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_Q|0\rangle_E \\ |1\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle_Q|0\rangle_E + \sqrt{p}|1\rangle_Q|1\rangle_E. \end{aligned}$$

p gibt die Wahrscheinlichkeit an, ob das Qubit mit der Umgebung wechselwirkt. Finden Sie die entsprechenden Kraus-Operatoren und finden Sie heraus, wie sich dabei der Bloch-Vektor transformiert.

Aufgabe 21: Neumark-Theorem

Beweisen Sie das Neumark Theorem:

Theorem (Neumark)**.** *Jedes POVM* $\{F_a\}, a = 1, \ldots, n$ *auf* $\mathcal{H}_A$ *mit* $N = \dim \mathcal{H}_A \leq n$ *(wobei* $\mathrm{rang} F_a = 1$ *gelten soll) lässt sich als orthogonale Messung auf* $\mathcal{H}$ *mit* $\mathcal{H}_A \subseteq \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_A^\perp$ *realisieren, wobei* $\dim \mathcal{H} \geq n$.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Jedes POVM-Element F_a kann durch einen nicht-normierten Vektor $|\tilde{\psi}_a\rangle$ dargestellt werden, $F_a = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a|$. Zeigen Sie zunächst, dass die Vektoren mit Komponenten $(\psi_a)_i \equiv \langle i|\tilde{\psi}_a\rangle$ orthogonal im n-dimensionalen Raum $\mathcal{H}$ sind, d.h.

$$\sum_a (\psi_a)_i^* (\psi_a)_j = \delta_{ij},$$

wobei $\{|i\rangle\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_A$ ist.

b) Man kann diese Vektoren zu einer Basis $\{(u_a)_i = \langle i|u_a\rangle\}$ des n-dimensionalen Raums erweitern, indem $|u_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + |\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$ gewählt wird, mit $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle \in \mathcal{H}_A^\perp$. Zeigen Sie schließlich, dass die orthogonale Messung $P_a = |u_a\rangle\langle u_a|$ auf $\mathcal{H}$ dem POVM-Element F_a mit zugehörigem Messoperator $M_a = \sqrt{F_a}$ auf $\mathcal{H}_A$ entspricht.