UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Niklas Rohling
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/14S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2014 - Übungsblatt 4
Ausgabe: 20.05.2014, Abgabe: 03.06.2014, Übungen: 05./06.06.2014

Aufgabe 16 : Die Blochkugel (schriftlich, 5 Punkte)

Die Dichtematrix eines Zweizustandsystems kann wie bekannt immer als $\boldsymbol{\rho} = (\mathbb{1} + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2$ geschrieben werden.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie für einen beliebigen Vektor $\mathbf{n}$ den Erwartungswert $\langle \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\rangle$.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\boldsymbol{\rho}$ und die zuhörenden Eigenvektoren.

c) (2 Punkte) Ein reiner Zustand sei durch

$$|\theta,\varphi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\theta/2 \\ e^{i\varphi/2}\sin\theta/2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie auch hier die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{\rho} = |\theta,\varphi\rangle\langle\theta,\varphi|$. Was ist $\mathbf{p}$ für diesen Zustand?

Aufgabe 17 : Die reduzierte Dichtematrix (schriftlich, 8 Punkte)

Gegeben ist ein aus zwei Teilen bestehender (bipartiter) Hilbertraum, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ und ein Zustand $\boldsymbol{\rho}$.

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die reduzierte Dichtematrix, $\boldsymbol{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B\,\boldsymbol{\rho}$, die folgenden Eigenschaften hat:
i) $\boldsymbol{\rho}_A$ ist positiv.
ii) $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\rho}_A = 1$.
iii) $\boldsymbol{\rho}_A^\dagger = \boldsymbol{\rho}_A$.

b) (2 Punkte) Betrachten Sie jetzt ein Zweiqubitsystem mit $|ab\rangle = |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B$. Gegeben sei der Zustand

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + \sin\varphi\,|10\rangle + \cos\varphi\,|11\rangle\right).$$

Betrachten Sie den reinen Zustand $\boldsymbol{\rho} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ und berechnen Sie $\boldsymbol{\rho}_A$ und $\boldsymbol{\rho}_B$.

c) (3 Punkte) Verwenden Sie das Ergebnis aus b) und finden Sie die Schmidt-Zerlegung des Zustands $|\varphi\rangle$. Überprüfen Sie das Ergebnis!

Aufgabe 18 : POVM

Gegeben sind vier Operatoren,
$F_1 = \frac{1}{2}|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z|$, $\quad F_2 = \frac{1}{2}|\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z|$, $\quad F_3 = \frac{1}{2}|\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|$, $\quad F_4 = \frac{1}{2}|\downarrow_x\rangle\langle\downarrow_x|$.
Zeigen Sie, dass diese POVM als eine orthogonale Messung in einem Zweiqubitsystem unter der Einführung eines weiteren Spins (Hilfs- oder Ancilla-Spin gennant) realisiert werden kann.