UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Niklas Rohling
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/14S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2014 - Übungsblatt 1
Ausgabe: 29.4.2014, Abgabe: 6.5.2014, Übungen: 8./9.5.2014

Aufgabe 4 : Grenzwert (schriftlich, 1 Punkt)

Zeigen Sie

$$\lim_{p\to 0} p \log p = 0.$$

Aufgabe 5 : Konkavität der Shannon-Entropie (schriftlich)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie die Konkavität der Shannon-Entropie, d. h., beweisen Sie für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_1 und p_2 über dasselbe Alphabet X, dass die Shannon-Entropie $H(p) = -\sum_{x\in X} p(x)\log p(x)$ für die gemischte Wahrscheinlichkeitsverteilung p, gegeben durch $p(x) = wp_1(x) + (1-w)p_2(x)$, die Ungleichung

$$H(p) \geq wH(p_1) + (1-w)H(p_2) \tag{1}$$

erfüllt wobei $0 \leq w \leq 1$. Sie dürfen verwenden, dass eine Funktion mit nicht positiver zweiter Ableitung konkav ist.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (1) nur gilt, wenn $p_1 = p_2$ oder $w \in \{0, 1\}$.

c) (2 Punkt) Wir betrachten nun ein Bit, d. h. $X = \{0, 1\}$. Stellen Sie H als Funktion der Wahrscheinlichkeit $p(0)$ grafisch dar. Veranschaulichen Sie nun die Konkavität der Shannon-Entropie, indem Sie die Werte für $H(wp_1 + (1-w)p_2)$ und $wH(p_1) + (1-w)H(p_2)$ für ein $w \in (0, 1)$ und zwei Wahrscheinlichkeiten $0 < p_1(0) < p_2(0) < 1$ einzeichnen.

Aufgabe 6 : Shannon-Entropie für zwei Ereignisse

Sei p die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Botschaft der Länge 2 wobei das erste Zeichen, x, aus dem Alphabet X und das zweite, y, aus dem Alphabet Y stammt. Die Zeichenkombination x, y tritt mit der Wahrscheinlichkeit $p(x, y)$ auf. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_x und p_y für die einzelnen Symbole sind dann gegeben durch $p_x(x) = \sum_{y\in Y} p(x, y)$ und $p_y(y) = \sum_{x\in X} p(x, y)$.

a) Beweisen Sie $H(p) \geq H(p_x), H(p_y)$.

b) Wann gilt $H(p) = H(p_x)$?

Aufgabe 7 : Subadditivität der Shannon-Entropie

Es sollen folgende Behauptungen bewiesen werden. Seien p, X, Y, p_x und p_y wie in Aufgabe 6, dann gilt

$$H(p) \leq H(p_x) + H(p_y)$$

und

$$H(p) = H(p_x) + H(p_y) \;\Leftrightarrow\; p(x,y) = p_x(x)p_y(y) \;\forall x \in X, y \in Y.$$

Die zweite Aussage bedeutet, dass die Shannon-Entropie H nur im Fall nicht korrelierter Ereignisse additiv ist.

Hinweis: Bei einer möglichen Lösungsvariante wird der Logarithmus durch seine Tangente an der Stelle 1 abgeschätzt.

Aufgabe 8 : Typische Botschaften

Wir betrachten eine Botschaft der Länge n mit dem Alphabet $\{0, 1\}$ (also n Bits), wobei für jedes einzelne Bit 0 mit der Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ auftritt. Wir bezeichnen die Anzahl von Nullen in einer Botschaft mit k und ihre relative Häufigkeit mit $p' = k/n$. Zeigen Sie, dass im Grenzfall $n \to \infty$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Botschaften mit k Nullen gegen Null geht, es sei denn $p' \to p$. Die Sterlingformel ist beim Berechnen des Grenzwertes hilfreich.