UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/18S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2018 - Übungsblatt 9
Ausgabe: 26.6.2018, Abgabe: 3.7.2018, Übungen: 5./6.7.2018

Aufgabe 28: 2-Qubit Zeitentwicklung (3 Punkte)

Die Zeitentwicklung eines Zwei-Qubit-Systems sei durch folgenden Hamiltonoperator gegeben:

$$H = \sigma_{1,x} \otimes \sigma_{2,x} + \sigma_{1,y} \otimes \sigma_{2,y} + \sigma_{1,z} \otimes \sigma_{2,z}$$

(in dimensionslosen Einheiten). Für $t = 0$ ist die gesamte Dichtematrix $\rho(0) = \rho_1(0) \otimes \rho_2(0)$, mit $\rho_2(0) = |0\rangle\langle 0|$.
a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Kraus-Operatoren für die Entwicklung von $\rho_1(t)$,

$$\rho_1(t) = \Lambda_t \rho_1(0) \ ,$$

und plotten Sie die Population des angeregten Zustandes $|1\rangle$ als Funktion von t. Wäre die Markov-Näherung hier gerechtfertigt?
b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\Lambda_{t_1+t_2}\rho_1(0) \neq \Lambda_{t_2}\Lambda_{t_1}\rho_1(0)$ und geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 29: Verschränkung und lokale Operationen (5 Punkte)

Es sei der folgende Zustand im Raum $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ gegeben:

$$|\psi\rangle = \cos\alpha\,|00\rangle + \sin\alpha\,|11\rangle \,.$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Von-Neumann-Entropie $S(\rho_A)$ von $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\,|\psi\rangle\,\langle\psi|$. Plotten Sie $S(\rho_A)$ als Funktion von α für $\alpha \in [0, \pi]$

b) (1 Punkt) Betrachten Sie die Transformation $U = U_A \otimes \mathbb{1}_B$ mit $U_A = \sigma_x$. Berechnen Sie explizit die Von-Neumann-Entropie von ρ'_A, die dem Zustand $|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle$ entspricht.

c) (2 Punkte) Betrachten Sie die folgende POVM auf $\mathcal{H}_A$ mit $F_0 = \varepsilon\,|\phi\rangle\,\langle\phi|$ und $F_1 = \mathbb{1}_A - F_0$, wobei $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A + |1\rangle_A\right)$ und $0 < \epsilon \leq 1$. Es wird eine nicht selektive Messung durchgeführt. Berechnen Sie die Von-Neumann-Entropie $S(\rho''_A)$ von $\rho''_A = \sum_{i=0,1} M_i \rho_A M_i^\dagger$, wobei $M_i = \sqrt{F_i}$. Vergleichen Sie $S(\rho''_A)$ und $S(\rho_A)$.

d) (1 Punkt) Jetzt wird eine selektive Messung in dem Zustand $|1\rangle_A$ durchgeführt, so dass $\rho'''_A = M_1 \rho_A M_1^\dagger / \mathrm{Tr}(F_1 \rho_A)$. Berechnen Sie $S(\rho'''_A)$ und plotten Sie sie in Anhängigkeit von ε für $\alpha = \pi/6$.

Aufgabe 30 : Verschränkung von drei Teilsystemen *(tripartite entanglement)*

a) Betrachten Sie den Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) Zustand

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |111\rangle\right).$$

Zeigen Sie, dass dieser Zustand im Bezug auf jede zwei Teilsysteme einen gemischten Zustand darstellt, der nicht verschränkt ist. Überzeugen Sie sich dann, dass bei einer projektiven Messung an einem der Teilsysteme in einem der Zustände $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ die Verschränkung auch verloren geht (der resultierende Zwei-Qubit-Zustand nicht verschränkt ist).

b) Wie sieht es beim sogenannten W-Zustand

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle\right)$$

aus?

Aufgabe 31 : Nielsen-Theorem (4 Punkte)

Alice und Bob besitzen einen gemeinsamen Quantenzustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, den sie mittels lokaler Operationen und klassischer Kommunikation (LOCC) manipulieren dürfen. Die Von-Neumann-Entropie $S(\rho_A^\psi)$ mit $\rho_A^\psi = \mathrm{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$ ist ein Maß für die Verschränkung von $|\psi\rangle$.
Das Nielsen-Theorem [Nielsen, Phys. Rev. Lett. **83**, 436 (1999)] besagt, dass eine Transformation zu einem anderen reinen Quantenzustand $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit Wahrscheinlichkeit 1 genau dann möglich ist, wenn die Eigenwerte ($\lambda_1^\psi \geq \lambda_2^\psi \geq \cdots \geq \lambda_N^\psi$) von ρ_A^ψ durch die Eigenwerte ($\lambda_1^\phi \geq \lambda_2^\phi \geq \cdots \geq \lambda_N^\phi$) von ρ_A^ϕ majorisiert werden, d.h.

$$\sum_{n=1}^{k} \lambda_n^\psi \leq \sum_{n=1}^{k} \lambda_n^\phi \quad \forall k \in \{1, \ldots, N\}.$$

a) (2 Punkte) Betrachten Sie den Zustand

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|0\rangle_A - |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle_B + \sqrt{\frac{1}{3}} |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B .$$

Alice führt nun eine projektive Messung mit den Projektionsoperatoren $P_0 = |0\rangle_{A\,A}\langle 0| + |2\rangle_{A\,A}\langle 2|$ und $P_1 = \mathbb{1} - P_0 = |1\rangle_{A\,A}\langle 1|$ aus. Welche Zustände $|\psi_0\rangle$ und $|\psi_1\rangle$ werden dadurch mit welcher Wahrscheinlichkeit erzeugt? Bestimmen Sie die Eigenwerte von ρ_A^ψ, $\rho_A^{\psi_0}$ und $\rho_A^{\psi_1}$ und die zugehörigen Von-Neumann-Entropien. Entscheiden Sie mit Hilfe des Nielsen-Theorems, ob eine Transformation $|\psi\rangle \mapsto |\psi_{0,1}\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit 1 mittels LOCC möglich ist.

b) (2 Punkte) Betrachten Sie nun die Zustände

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{15}{32}} \left[\, |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \right] + \frac{1}{\sqrt{32}} \left[\, |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B + |3\rangle_A \otimes |3\rangle_B \right],$$

$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}} |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\, |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B \right].$$

Ist $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle$ oder $|\phi\rangle \mapsto |\psi\rangle$ mittels LOCC und mit Wahrscheinlichkeit 1 möglich? Ist die Abbildungen $|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle \mapsto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$ auf diese Art möglich? Dabei ist

$$|\chi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}} |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B$$

ein weiterer zwischen A und B verschränkter Zustand.