UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/18S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2018 - Übungsblatt 8
Ausgabe: 19.6.2018, Abgabe: 26.6.2018, Übungen: 28./29.6.2018

Aufgabe 26: Phasen- und Amplitudendämpfung (3 Punkte)

a) (1 Punkt) Gegeben sei ein Amplitudendämpfungskanal; zeigen Sie, dass $T_2 = 2T_1$. Die T_2-Phasenkohärenzzeit ist definiert als die Inverse der exponentiellen Zerfallsrate Γ_2 der nicht-diagonalen Elemente der Qubit-Dichtematrix. Die T_1-Relaxationszeit ist definiert als die Inverse der exponentiellen Zerfallsrate Γ_1 der diagonalen Elemente. Nehmen Sie nun zusätzlich eine Phasendämpfung mit Zerfallsrate Γ_ϕ an und zeigen Sie, dass $T_2 < 2T_1$ und dass die Korringabeziehung $1/T_2 = 1/(2T_1) + 1/T_\phi$ erfüllt ist.

b) (2 Punkte) Die Wechselwirkung zwischen einem harmonischen Oszillator (mit Operatoren $a, a^\dagger$) und einem Reservoir (beschrieben durch einen harmonischen Oszillator mit Operatoren $b, b^\dagger$) wird durch den folgenden Hamiltonoperator beschrieben,

$$H = \chi a^\dagger a(b + b^\dagger) \; .$$

Innerhalb den Markov-Näherung wird die Dämpfung des Oszillators durch den Lindblad-Superoperator $L = \sqrt{\Gamma} a^\dagger a$ beschrieben. Zeigen Sie, dass die nicht-diagonalen Elemente der Dichtematrix, $\rho_{nm} = \langle n|\rho|m\rangle$, exponentiell wie $e^{-\lambda t(n-m)^2}$ mit einer Konstante λ zerfallen.

Aufgabe 27: Gedämpfter harmonischer Oszillator (6 Punkte)

Betrachten wir einen harmonischen Oszillator $H_0 = \omega\, a^\dagger a$ ($\hbar = 1$), der mit einem Reservoir wechselwirkt. Wenn das Reservoir nur im Grundzustand ist, kann der harmonische Oszillator nur von einem angeregten Zustand zum nächsten tiefer liegenden Zustand durch Emission eines Photons abgeregt werden und kann keine Photonen absorbieren. Deshalb kann die Dämpfung des Oszillators durch den Lindblad-Operator $L = \sqrt{\Gamma} a$ beschrieben werden, wo Γ die Rate ist, mit welcher der Oszillator vom ersten angeregten Zustand ($n = 1$) zum Grundzustand übergeht ($n = 0$).

a) (1 Punkt) Stellen Sie die Lindblad-Gleichung für den harmonischen Oszillator auf. Gehen Sie zum Wechselwirkungsbild mit H_0 über. Wie sieht die Lindblad-Gleichung für den Dichteoperator im Wechselwirkungsbild ρ_I aus?

b) (1 Punkte) Finden Sie die Dynamik der Erwartungswerte $\langle a\rangle(t)$ und $\langle a^\dagger a\rangle(t) \equiv \langle n\rangle(t)$.
Hinweis: Die Differentialgleichung für den Erwartungswert eines allgemeinen Operators A ($\langle A\rangle = \mathrm{Tr}\,\{A\rho\}$) ist $\frac{d}{dt}\langle A\rangle(t) = \mathrm{Tr}\,\{A\dot{\rho}\}$.

c) (2 Punkte) Betrachten wir die Funktion

$$X(\lambda, \lambda^*, t) = \mathrm{Tr}[\rho_I(t) \mathrm{e}^{\lambda a^\dagger} \mathrm{e}^{-\lambda^* a}],$$

wo λ ein komplex Zahl ist (λ und λ^* können wie unabhängige Variablen behandelt werden). Benutzen Sie die Lindblad-Gleichung für $\dot{\rho}_I$ und berechnen Sie dX/dt, $\partial X/\partial\lambda$ und $\partial X/\partial\lambda^*$, um eine Differenzialgleichung für $X(\lambda, \lambda^*, t)$ aufzustellen und zu lösen. Die Lösung soll in der Form

$$X(\lambda, \lambda^*, t) = X(\lambda', \lambda'^*, 0)$$

sein, wo λ' eine Funktion von λ, Γ und t ist. Was ist die Funktion $\lambda'(\lambda, \Gamma, t)$?
Hinweis: Nutzen Sie die folgenden Kommutatorrelationen:

$$[a, M(a^\dagger, a)] = \frac{\partial M(a^\dagger, a)}{\partial a^\dagger}, \qquad [M(a^\dagger, a), a^\dagger] = \frac{\partial M(a^\dagger, a)}{\partial a},$$

d) (2 Punkte) Nehmen wir an, dass der harmonische Oscillator sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im sogenannten “cat state” befindet:

$$|\mathrm{cat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle),$$

wo $|\alpha\rangle$ einen kohärenten Zustand bezeichnet:

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger} |0\rangle.$$

α ist eine komplexe Zahl. Benutzen Sie das Ergebnis aus c), um den Dichteoperator zu einem späteren Zeitpunkt t abzuleiten. Mit welcher Rate werden die nichtdiagonalen Terme $|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2|$ und $|\alpha_2\rangle\langle\alpha_1|$ von ρ unter der Annahme $\Gamma t \ll 1$ gedämpft?