

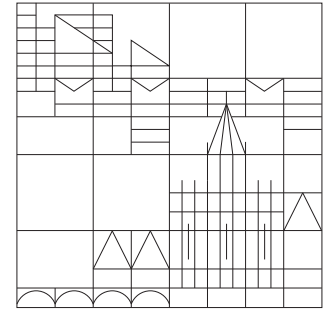
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard

Dr. Mónica Benito

<http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/18S-QI>



Quanteninformatiionstheorie

Sommersemester 2018 - Übungsblatt 7

Ausgabe: 12.6.2018, Abgabe: 19.6.2018, Übungen: 21./22.6.2018

Aufgabe 24: Verschränkungs-Destillation (4 Punkte)

Der reine Zwei-Qubit Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

kann durch lokale Operationen zu dem Bell-Zustand

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

destilliert werden.

a) (2 Punkte) Sei M_0 ein Mess-Operator einer generalisierten Messung für das erste Qubit,

$$M_0 = \frac{k}{\alpha}|0\rangle\langle 0| + \frac{k}{\beta}|1\rangle\langle 1|.$$

Finden Sie den zweiten Mess-Operator M_1 , sowie die entsprechenden POVM-Elemente. Für welche Werte von k ist diese Messung mit 2 POVM-Elemente möglich?

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass M_0 den Zustand $|\psi\rangle$ in dem Bell-Zustand $|\Phi^+\rangle$ verwandelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_0 dieses Prozesses.

Aufgabe 25: Dekohärenz auf der Bloch-Kugel (6 Punkte)

Der Zustand eines Qubits kann immer auf der Bloch-Kugel durch den Bloch-Vektor \mathbf{b} dargestellt werden,

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

wobei \mathbf{b} ein dreidimensionaler reeller Vektor ist.

a) Nehmen wir an, das Qubit werde mit der Wahrscheinlichkeit $\tilde{p} = \frac{4}{3}p$ depolarisiert, d. h. durch einen komplett gemischten Zustand $\mathbb{1}/2$ ersetzt.

(i) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Dichte-Operator des Qubits sich durch diese Operation wie folgt verändert:

$$\rho \rightarrow \rho' = (1 - p)\rho + \frac{p}{3}(\sigma_1\rho\sigma_1 + \sigma_2\rho\sigma_2 + \sigma_3\rho\sigma_3).$$

(ii) (2 Punkte) Wie verändert sich dabei der Bloch-Vektor?

b) (2 Punkte) Eine Amplituden-Dämpfung kann man z. B. bei der spontanen Emission eines angeregten Atoms beobachten. Mit der Wahrscheinlichkeit p geht das Atom in den Grundzustand $|0\rangle_Q$ über und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ bleibt es im angeregten Zustand $|1\rangle_Q$. Die unitäre Transformation, die diesen Vorgang beschreibt, ist

$$\begin{aligned} |0\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_Q|0\rangle_E \\ |1\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle_Q|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_Q|1\rangle_E. \end{aligned}$$

$|0\rangle_Q|1\rangle_E$ beschreibt den Zustand der Umgebung oder hier die Anzahl der ausgestrahlten Photonen. Finden Sie die Kraus-Operatoren, die den Dichte-Operator transformieren. Was passiert mit dem Bloch-Vektor nach der Amplituden-Dämpfung?

c) (3 Punkte) Die Dekohärenz der Phase eines Qubits kann man durch die folgende unitäre Operation beschreiben:

$$\begin{aligned} |0\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_Q|0\rangle_E \\ |1\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle_Q|0\rangle_E + \sqrt{p}|1\rangle_Q|1\rangle_E. \end{aligned}$$

p gibt die Wahrscheinlichkeit an, ob das Qubit mit der Umgebung wechselwirkt. Finden Sie die entsprechenden Kraus-Operatoren und finden Sie heraus, wie sich dabei der Bloch-Vektor transformiert.