UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/18S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2018 - Übungsblatt 5
Ausgabe: 29.5.2018, Abgabe: 5.6.2018, Übungen: 7./8.6.2018

Aufgabe 17 : Die reduzierte Dichtematrix (3 Punkte)

Gegeben ist ein aus zwei Teilen bestehender (bipartiter) Hilbertraum, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ und ein Zustand $\boldsymbol{\rho}$.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie explizit, dass die reduzierte Dichtematrix, $\boldsymbol{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B\, \boldsymbol{\rho}$, die folgenden Eigenschaften hat:
i) $\boldsymbol{\rho}_A$ ist positiv semidefinit.
ii) $\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\rho}_A = 1$.
iii) $\boldsymbol{\rho}_A^\dagger = \boldsymbol{\rho}_A$.

b) (1 Punkt) Betrachten Sie jetzt ein Zweiqubitsystem mit $|ab\rangle = |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B$. Gegeben sei der Zustand

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle + \sin\varphi\, |10\rangle + \cos\varphi\, |11\rangle\right).$$

Betrachten Sie die Dichtematrix $\boldsymbol{\rho} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ und berechnen Sie $\boldsymbol{\rho}_A$ und $\boldsymbol{\rho}_B$.

c) (1 Punkt) Verwenden Sie das Ergebnis aus b) und finden Sie die Schmidt-Zerlegung des Zustands $|\varphi\rangle$. Überprüfen Sie das Ergebnis!

Aufgabe 18: 2-Qubit Separabilität (3 Punkte)

a) (2 Punkte) Gegeben ist der 2-Qubit Zustand

$$|\Psi\rangle = \sin\frac{\tau-\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}|0\rangle\otimes|0\rangle + \sin\frac{\tau+\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle\otimes|1\rangle + \cos\frac{\tau-\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\otimes|0\rangle + \cos\frac{\tau+\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}|1\rangle\otimes|1\rangle$$

Finden Sie die Bedingungen für ϕ, τ und θ, damit der Zustand separable ist. Schreiben Sie den dazugehörigen Zustand als Produkt-Zustand.
b) (1 Punkt) Kann der Bell-Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|1\rangle - |1\rangle\otimes|0\rangle)$$

als ein Produkt-Zustand dargestellt werden? Was ist die Schmidt-Zahl (oder der Schmidt-Rang) dieses Zustands?

Aufgabe 19 : POVM

Gegeben sind vier Operatoren,
$F_1 = \frac{1}{2} |\uparrow_z\rangle \langle\uparrow_z|, \quad F_2 = \frac{1}{2} |\downarrow_z\rangle \langle\downarrow_z|, \quad F_3 = \frac{1}{2} |\uparrow_x\rangle \langle\uparrow_x|, \quad F_4 = \frac{1}{2} |\downarrow_x\rangle \langle\downarrow_x|.$
Die Zustande $|\uparrow_\alpha\rangle$ und $|\downarrow_\alpha\rangle$ sind Eigenzustände der Spin-1/2 Operatoren entlang der Achse α, $S_\alpha |\uparrow(\downarrow)_\alpha\rangle = \pm\frac{1}{2} |\uparrow(\downarrow)_\alpha\rangle$. The states $|\uparrow_\alpha\rangle$ and $|\downarrow_\alpha\rangle$ are the eigenstates of the 1/2-spin operators in direction α, $S_\alpha |\uparrow(\downarrow)_\alpha\rangle = \pm\frac{1}{2} |\uparrow(\downarrow)_\alpha\rangle$. Zeigen Sie, dass diese POVM als eine orthogonale Messung in einem Zweiqubitsystem unter der Einführung eines weiteren Spins (Hilfs- oder Ancilla-Spin genannt) realisiert werden kann.

Aufgabe 20: Bures-Abstand (3 Punkte)

Der *Bures-Abstand* zwischen zwei Zustände, die durch Dichteoperatoren ρ_1 und ρ_2 in einem Hilbert-Raum gegeben sind, wird wie folgt definiert:

$$D_{\mathrm{B}}(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{2}\sqrt{1 - \mathrm{Tr}\left[\left(\rho_1^{1/2}\rho_2\rho_1^{1/2}\right)^{1/2}\right]}.$$

Beachten Sie, dass es bei einem positiv semidefiniten Operator immer genau eine Wurzel gibt, die auch positiv semidefinit ist. Genau diese Wurzel ist in der obigen Definition gemeint.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie $D_{\mathrm{B}}(\rho_1, \rho_2)$ für

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

b) (1 Punkt) Wie sieht der Bures-Abstand für zwei reine Zustände mit den Wellenfunktionen $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ aus?

c) (1 Punkt) Warum wäre die einfachere Variante

$$D(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{\mathrm{Tr}\left[\rho_1\rho_2\right]}}$$

für die Definition des Abstandes ungeeignet?