

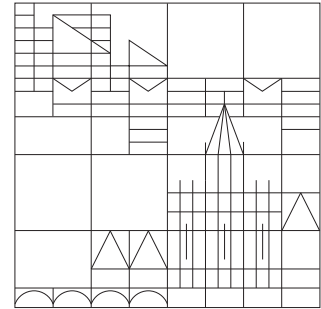
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard

Dr. Mónica Benito

<http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/18S-QI>



## Quanteninformatiionstheorie

### Sommersemester 2018 - Übungsblatt 4

Ausgabe: 22.5.2018, Abgabe: 29.5.2018, Übungen: 31.5/1.6.2018

#### Aufgabe 14 : CNOT, Hadamard und CPHASE-Gatter (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein CNOT-Gatter durch 2 Hadamard-Gatter und ein CPHASE-Gatter,

$$U_{\text{Cph}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit  $\phi = \pi$ , ausgedrückt werden kann. Zeichnen Sie die Quantenschaltung.

#### Aufgabe 15 : Euler Winkel

Eine Ein-Qubit-Rotation  $R_{\vec{n}}(\theta)$  mit Winkel  $\theta$  um die Achse  $\vec{n}$ , kann durch

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \exp(-i\theta \vec{n} \cdot \vec{\sigma}/2) \quad (2)$$

ausgedrückt werden.

a) Zeigen Sie, dass

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\theta}{2}. \quad (3)$$

Benutzen Sie die Eigenschaften von den Pauli-Matrizen.

b) Zeigen Sie, dass eine beliebige unitäre Ein-Qubit-Operation durch

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta). \quad (4)$$

implementiert werden kann.

Hint: Verwenden Sie, dass  $U^\dagger U = 1$ .

#### Aufgabe 16: Hamiltonoperator und Quantengatter (4 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Hamiltonoperator für ein Qubit,

$$H = i\hbar \frac{\omega}{2} (|0\rangle \langle 1| - |1\rangle \langle 0|), \quad (5)$$

der auf einem Hilbert-Raum von orthogonalen Zuständen  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  wirkt, wobei  $\omega$  reell ist.

a) Überprüfen Sie, ob  $H$  selbstadjungiert ist.

b) Finden Sie die Eigenwerte und die entsprechenden normierten Eigenzustände von  $H$ .

c) Finden Sie die unitäre Matrix

$$U(t) = \exp(-iHt/\hbar). \quad (6)$$

Zu welchen Zeiten  $t$  wirkt  $U(t)$  wie ein NOT-Operator:

$$U(t) |0\rangle \rightarrow |1\rangle, \quad U(t) |1\rangle \rightarrow |0\rangle? \quad (7)$$

d) Berechnen Sie  $U(t = \pi/2\omega)$  und  $(U(t = \pi/2\omega))^2$ .

### **Aufgabe 17 : Die Blochkugel (3 Punkte)**

Die Dichtematrix eines Zweizustandssystems kann wie bekannt immer als  $\rho = (\mathbb{1} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})/2$  geschrieben werden.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{n}$  den Erwartungswert  $\langle \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle$ .

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\rho$  und die dazugehörigen Eigenvektoren.

c) (2 Punkte) Ein reiner Zustand sei durch

$$|\theta, \varphi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

gegeben. Berechnen Sie auch hier die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\rho = |\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi|$ . Was ist  $\mathbf{p}$  für diesen Zustand?