UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/18S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2018 - Übungsblatt 11
Ausgabe: 10.7.2018, Abgabe: 17.7.2018, Übungen: 19./20.7.2018

Aufgabe 35 : Concurrence (2 Punkte)

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Definitionen der *Concurrence*, $C := \sqrt{2\left[1 - \mathrm{Tr}(\rho_A^2)\right]}$ und $C := |\langle\psi|\,\theta\,|\psi\rangle|$ für reine Zustände in einem bipartiten Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$. Dabei ist die Wirkung des Operators θ auf einen Zustand $|\psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle$ gegeben durch $\theta\,|\psi\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y\,|\psi\rangle^* = -\alpha_{11}^*\,|00\rangle + \alpha_{10}^*\,|01\rangle + \alpha_{01}^*\,|10\rangle - \alpha_{00}^*\,|11\rangle$ und $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\,|\psi\rangle\langle\psi|$ ist die Dichtematrix im Teilsystem A.

Aufgabe 36 : Eigenschaften der Von-Neumann-Entropie (5 Punkte)

Die relative Entropie zweier Dichtematrizen ρ und σ ist definiert als

$$S(\rho|\sigma) = \mathrm{Tr}[\rho(\log\rho - \log\sigma)].$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie $S(\rho|\sigma) \geq 0$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass die Funktion $f(x) = -x\log x$ konkav ist, d.h. $f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \geq \sum_i \lambda_i f(x_i)$ für $\lambda_i > 0$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$ als auch $f(y) - f(x) \leq (y-x)f'(x)$, um zu zeigen, dass $\mathrm{Tr}\left[f(\hat{B}) - f(\hat{A})\right] \leq \mathrm{Tr}\left[(\hat{B} - \hat{A})f'(\hat{A})\right]$ für zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass $S(\rho) \leq \log d$ gilt, wenn ρ eine $d \times d$-Matrix ist.

c) (1 Punkt) Nutzen Sie a) um die Subadditivität der Von-Neumann-Entropie zu zeigen,

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B).$$

Hinweis: Betrachten Sie die relative Entropie der Dichtematrizen $\rho_A \otimes \rho_B$ und ρ_{AB}.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe von c) die Konkavität der Von-Neumann-Entropie, d.h.

$$S\left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right) \geq \sum_i \lambda_i S(\rho_i)$$

für $\lambda_i > 0$ und $\sum_i \lambda_i = 1$.

Hinweis: Verwenden sie die Subadditivität bezüglich des Zustands $\rho_{AB} = \sum_i \lambda_i\,(\rho_i)_A \otimes (|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)_B$, wobei $(\rho_i)_A \equiv \rho_i$ (nicht mit der Bezeichnung für die reduzierte Dichtematrix verwechseln!) und $\{|\psi_i\rangle_B\}$ eine beliebige orthonormierte Basis ist.

e) (1 Punkt) Zeigen Sie die Araki-Lieb-Ungleichung (Dreiecksungleichung),

$$S(\rho_{AB}) \geq |S(\rho_A) - S(\rho_B)|.$$

Hinweis: Erweitern Sie das System auf ABC mit einem reinen Zustand $|\psi\rangle$, sodass $\rho_{AB} = \mathrm{Tr}_C\,|\psi\rangle\langle\psi|$. Wenden Sie dann die Subadditivität auf ρ_{BC} und ρ_{AC} an.

Aufgabe 37 : Simon Algorithmus (5 Punkte)

Mit Hilfe des Quanten-Simon-Algorithmus lässt sich die Periode einer unbekannte Funktion schneller als mit jeder klassischen Methode berechnen. Gegeben sei ein Orakel, das n-Qubits als Eingabe verwendet um die Funktion $f(a)$ zu berechnen. Diese Funktion ist periodisch unter der bitweisen Addition Modulo 2, das heißt $f(a \oplus b) = f(a) \, \forall \, a$ und für alle andere Werte a unterschiedlich.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Periode (n-bit Zahl) b durch $b = a_1 \oplus a_2$ bestimmt werden kann, wenn man zwei Werte a_1 and a_2 findet für welche $f(a_1) = f(a_2)$ gilt. Schätzen Sie die Anzahl der notwendigen klassischen Versuche als Funktion von n.

b) (2 Punkte) Der Simon-Algorithmus verlangt als als Startwert ein n-Qubit-Register, welches in einer Überlagerung aller Zustände $|a\rangle$ ist,

$$|r_1\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{a=0}^{2^n-1} |a\rangle \ .$$

In ein zweites n-Qubit-Register mit jedem Qubit im Zustand $|r_2\rangle = |0\rangle$ werden die Ergebnisse des Orakels geschrieben. Das Orakel führt folgende Abbildung aus:

$$|r_1\rangle \otimes |r_2\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{a=0}^{2^n-1} |a\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{a=0}^{2^n-1} |a\rangle \otimes |f(a)\rangle \ .$$

Eine Messung wird auf dem zweitem Register in der (Berechungs)-Basis $|a\rangle$ durchgeführt, mit dem Ergebnis $f(a_1)$. Was ist der Zustand des ersten Registers, $|r_1'\rangle$, direkt nach der Messung?
Hinweis: $f(a') = f(a)$ gilt genau dann wenn $a' = a \oplus b$.

c) (2 Punkte) Aus dem Zustand $|r_1'\rangle$ lässt sich noch keine Information über die Periode b bekommen. Zeigen Sie, dass ein Hadamard-Gatter angewendet auf jedes Qubit den Zustand

$$H^{\otimes n}|r_1'\rangle = \frac{1}{2^{(n-1)/2}} \sum_{b \cdot c=0} (-1)^{a_1 \cdot c} |c\rangle$$

liefert. Die Summe geht über alle 2^{n-1} Werte von c für welche gilt, $b \cdot c = 0 \bmod 2$. Hier ist die Operation $a_1 \cdot c$ das bitweise Skalarprodukt der binären Darstellungen der Zahlen a_1 and c. Schätzen Sie die Anzahl der notwendigen elementaren Operationen , um die Zahl b zu finden.
Hinweise: Ein n-Qubit-Hadamard-Gatter, n-fache Tensorprodukt von 1-Qubit Hadamard-Gattern, kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$H^{\otimes n}|a\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{c=0}^{2^n-1} (-1)^{a \cdot c} |c\rangle$$