UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/18S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2018 - Übungsblatt 10
Ausgabe: 3.7.2018, Abgabe: 10.7.2018, Übungen: 12./13.7.2018

Aufgabe 32: Singulett-Zustand (4 Punkte)

Betrachten wir den Singulett-Zustand von zwei Spins 1/2:

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2).$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)|\Psi_-\rangle = 0$. Hier ist $\boldsymbol{\sigma}_i$ der Pauli-Matrizen-Vektor für Qubit i, $\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{i,x}, \sigma_{i,y}, \sigma_{i,z})$.

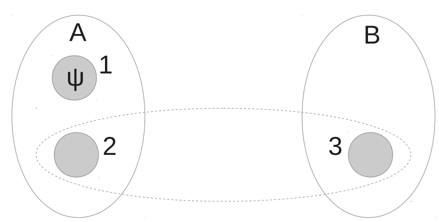
b) (1 Punkt) Was bekommt man für $\langle\Psi_-|\boldsymbol{\sigma}_{1(2)}|\Psi_-\rangle$?

c) (2 Punkte) Benutzen Sie das Ergebnis aus a) und b) um zu zeigen, dass

$$\langle\Psi_-|(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1)(\hat{\mathbf{m}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)|\Psi_-\rangle = -\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{m}},$$

wo $\hat{\mathbf{n}}$ und $\hat{\mathbf{m}}$ zwei dreidimensionale Einheitsvektoren sind.

Aufgabe 33 : Quantenteleportation (4 Punkte)



Alice möchte den Inhalt ihres Qubits $|\psi\rangle_1$ an Bob senden (teleportieren). Dafür teilen sich Alice und Bob zwei verschränkte Qubits (2 und 3, siehe Abb.) und wollen nun, dass Bobs Qubit (3) in den Zustand $|\psi\rangle_3$übergeht. Betrachten Sie den Quantenzustand $|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ und bilden Sie den Zustand $|\phi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\Psi_-\rangle_{23}$.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $|\phi\rangle$ sich als

$$\begin{aligned}|\phi\rangle = &\frac{1}{2}\,|\Phi_+\rangle_{12}\otimes(a\,|1\rangle - b\,|0\rangle)_3 + \frac{1}{2}\,|\Phi_-\rangle_{12}\otimes(a\,|1\rangle + b\,|0\rangle)_3\\ &+\frac{1}{2}\,|\Psi_+\rangle_{12}\otimes(-a\,|0\rangle + b\,|1\rangle)_3 + \frac{1}{2}\,|\Psi_-\rangle_{12}\otimes(-a\,|0\rangle - b\,|1\rangle)_3\end{aligned}$$

schreiben lässt. $|\Phi_\pm\rangle = \frac{|00\rangle\pm|11\rangle}{\sqrt{2}}$ und $|\Psi_\pm\rangle = \frac{|01\rangle\pm|10\rangle}{\sqrt{2}}$ sind hier die *Bell-Zustände* und bilden zusammen die *Bell-Basis*.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, wie eine Messung der zwei ersten Qubits von $|\phi\rangle$ verwendet werden kann, um den Zustand $|\psi\rangle$ als drittes Qubit zu bekommen.

c) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass die direkte Erzeugung von Verschränkung nur über einen maximalen Abstand l möglich wäre. Betrachten Sie die Situation, in der Alice und Bob sich in der Entfernung $2l$ von einander befinden. Dazwischen befindet sich ihr Freund Carl. Alice und Carl teilen sich jetzt ein Qubitpaar in einem Bell-Zustand und Bob und Carl ein anderes. Der Gesamtzustand lautet also $|\Psi_-\rangle \otimes |\Psi_-\rangle$. Zeigen Sie, dass durch Kenntnis über das Ergebnis einer Messung in der Bell-Basis von Carls zwei Qubits und lokale Operationen, ein Qubitpaar in einem Bell-Zustand zwischen Alice und Bob erzeugt werden kann.

Aufgabe 34 : Verschränkungsreinigung (6 Punkte)

a) (1 Punkt) Betrachten Sie den Dichteoperator für den Zustand,

$$\rho_W(r) = r\,|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + \frac{1-r}{4}\mathbb{1},$$

wobei $0 \le r \le 1$. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\rho_W(r)$ in der Produktbasis $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ an und bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i von $\rho_W(r)$ und berechnen Sie danach die *Concurrence*

$$C(\rho_W(r)) = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\},$$

mit $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge \lambda_4$, als Funktion von r.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Güte (*fidelity*) $F(r) = \langle\Phi_+|\rho_W(r)|\Phi_+\rangle$ und zeigen Sie, dass

$$\rho_W(F) = F\,|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + \frac{1-F}{3}\left(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|\right).$$

c) (2 Punkte) Betrachten Sie die unitären Matrizen für das bilaterale XOR- (oder CNOT-) Gatter

$$U_{\text{BXOR1}} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2,$$
$$U_{\text{BXOR2}} = \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

und $U_{\text{BXOR}} = U_{\text{BXOR1}} U_{\text{BXOR2}}$. Bilden Sie $\rho = U_{\text{BXOR}}\left(\rho_W(F) \otimes \rho_W(F)\right) U^\dagger_{\text{BXOR}}$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_c, dass sich die zwei letzten Qubits, nach Messung in der Produktbasis, in einem der Zustände $|00\rangle$ oder $|11\rangle$ befinden.

d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Güte des neuen Zustands,

$$F'(F) = \frac{\mathrm{Tr}\left\{\rho\left(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \otimes \Pi\right)\right\}}{p_c}, \text{ mit } \Pi = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Wie hängt Π mit p_c zusammen? Was passiert mit $F'(F)$ für $1/2 < F < 1$?