UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 9

Ausgabe: 8.1.2019, Abgabe: 15.1.2019, Übungen: 17.1.2019

Aufgabe 28: Bogoliubov Theorie für Bosonen (schriftlich) (7 Punkte)

In Impulsdarstellung ist der Hamiltonoperator eines schwach wechselwirkenden, verdünnten Bose-Gases

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}}$$

($\hbar = 1$). Im Grundzustand bei schwacher Wechselwirkung ist der Zustand $\mathbf{k} = 0$ immer makroskopisch besetzt ($n_0 \lesssim N$).

a) (2 Punkte) Entwickeln Sie den Wechselwirkungs-Hamiltonian entsprechend der Anzahl der bosonischen Operatoren mit $\mathbf{k} = 0$ und vernachlässigen Sie dabei Ausdrücke mit weniger als zwei $a_0, a_0^\dagger$ Operatoren. Erklären Sie warum man diese Terme vernachlässigen kann.
Hinweis: Benutzen Sie $V_{\mathbf{k}} = V_{-\mathbf{k}}$.

b) (1 Punkt) Ersetzen Sie in dem entwickelten Hamiltonoperator die Operatoren $a_0, a_0^\dagger$ durch die Zahl $\sqrt{n_0}$. Dann ersetzen Sie n_0 durch $(N - \sum_{\mathbf{k}\neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}})$. Vernachlässigen Sie alle Terme mit mehr als zwei Operatoren $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger$ und bringen den Hamiltonian damit in quadratische Form.

c) (1 Punkt) Als Ansatz zur Diagonalisierung mit Hilfe der Bogoliubov-Transformation verwenden wir

$$a_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}}^\dagger,$$
$$a_{\mathbf{k}}^\dagger = u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger + v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}},$$

wobei $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ reelle Zahlen sind. Zeigen Sie, dass aus den kanonischen bosonischen Vertauschungsrelationen für $\alpha_{\mathbf{k}}$, $\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger$ die Beziehung folgt: $u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 = 1$.

d) (2 Punkte) Stellen Sie H durch die neuen Operatoren dar und finden Sie dann $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$, so dass H diagonal wird.

e) (1 Punkt) Falls die Wechselwirkung aus einem Kontakt-Potential besteht, $V_{\mathbf{k}} = \lambda$, wobei λ eine Konstante ist, wie sieht das Energiespektrum der Anregungen aus?

Aufgabe 29: Suprafluidität (schriftlich) (3 Punkte)

Um die Suprafluidität zu verstehen, betrachten wir eine Flüssigkeit mit Masse M, die sich mit Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ durch eine Röhre bewegt. Strömungswiderstand entsteht, wenn kinetische Energie (und Impuls) von der Wand in die ruhende Flüssigkeit übertragen wird. Dazu müssen in der Flüssigkeit Anregungen aus dem Grundzustand erzeugt werden.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Energie und den Impuls der Flüssigkeit im Grundzustand im Laborsystem durch eine Galilei-Transformation zwischen dem Ruhesystem K_0 der Flüssigkeit und dem Laborsystem K.
Hinweis: Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} \text{Impuls:} \quad & \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 - M\mathbf{v}, \\ \text{Energie:} \quad & E = \frac{|\mathbf{P}|^2}{2M} = \frac{|\mathbf{P}_0|^2}{2M} + \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{v} + \frac{M|\mathbf{v}|^2}{2}. \end{aligned}$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Anregungsenergie eines Quasiteilchens mit Impuls $\mathbf{k}$ und Energie $\omega_{\mathbf{k}}$ im Laborsystem. Wie groß ist die kritische Geschwindigkeit, die solche Anregungen ermöglicht?