UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 8

Ausgabe: 18.12.2018, Abgabe: 8.1.2019, Übungen: 10.1.2019

Aufgabe 25: Austauschenergie (Präsenzaufgabe)

Gegeben sei ein fermionischer Zustand $|n_1, \dots, n_r, \dots\rangle$. Zeigen Sie, dass die Matrixelemente des Zweiteilchenwechselwirkung-Operators in zweiter Quantisierung,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} \langle r_1, r_2 | v | s_1, s_2 \rangle a^\dagger_{r_1} a^\dagger_{r_2} a_{s_2} a_{s_1} \,,$$

als

$$\langle n_1, \dots, n_r, \dots | V | n_1, \dots, n_r, \dots \rangle = \frac{1}{2} \sum_{r_1, r_2} \Big(\langle r_1, r_2 | v | r_1, r_2 \rangle - \langle r_1, r_2 | v | r_2, r_1 \rangle \Big) n_{r_1} n_{r_2}$$

geschrieben werden können. Das Matrixelement $\langle r_1, r_2 | v | r_2, r_1 \rangle$ heißt Austauschenergie.

Aufgabe 26: Zwei-Teilchen-Potential in der Wellenvektor-Basis (schriftlich) (6 Punkte)

Sei $v(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$ ein Zwei-Teilchen-Wechselwirkungspotential, welches invariant unter Verschiebung ist. Die Fourier-Transformation ist im Volumen $\Lambda = L^3$ durch

$$\tilde{v}_\Lambda(\boldsymbol{k}) = \int_\Lambda \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} v(\boldsymbol{x})$$

definiert. Man definiert auch die dazugehörende periodische Fourier-Reihe

$$v_\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tilde{v}_\Lambda(\boldsymbol{k}),$$

mit $\boldsymbol{k} = (2\pi n_1/L, 2\pi n_2/L, 2\pi n_3/L)$ und $n_i \in \mathbb{Z}$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass in zweiter Quantisierung die Wechselwirkung die folgende Form hat:

$$V = \frac{1}{2L^3} \sum_{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \mathbf{q}} \tilde{v}_\Lambda(\mathbf{q}) a^\dagger_{\boldsymbol{k}_1 + \mathbf{q}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}_2 - \mathbf{q}} a_{\boldsymbol{k}_2} a_{\boldsymbol{k}_1}. \tag{1}$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\tilde{v}_\Lambda(\boldsymbol{k})$ für die Coulomb-Wechselwirkung, wobei Sie den Grenzfall $L \to \infty$ betrachten.

Hinweis: verwenden Sie zuerst $v(\boldsymbol{x}) = e^2 \mathrm{e}^{-\alpha|\boldsymbol{x}|}/(4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{x}|)$ und führen dann den Grenzübergang $\alpha \to 0$ durch.

c) (2 Punkte) (Jellium-Modell) Betrachten Sie in erster Quantisierung den Hamiltonian eines System, dass aus N Elektronen (N ist groß) im Volumen $\Lambda = L^3$ und dem positiv geladenen Hintergrund mit der Dichte $\rho = N/\Lambda$ besteht,

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{|\boldsymbol{p}_j|^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N} v(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) - \rho \sum_{j=1}^{N} \int_\Lambda \mathrm{d}\boldsymbol{y} v(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{y}) + \frac{\rho^2}{2}\int_\Lambda \mathrm{d}\boldsymbol{x} \int_\Lambda \mathrm{d}\boldsymbol{y} v(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

Der erste Term ist die elektronische kinetische Energie, der zweite ist die abstoßende Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Elektronen, der dritte ist die Wechselwirkung der Elektronen mit dem positiv aufgeladenen Hintergrund, und der vierte ist die Energie des positiven Hintergrundes.

Überzeugen Sie sich davon, dass dann in zweiter Quantiserung der Term mit $\mathbf{q} = 0$ in Gl. (1) verschwindet.

Hinweis: Verwenden Sie $N \gg 1$.

Aufgabe 27: Paarkorrelationen für Bosonen (schriftlich) (4 Punkte)

Nehmen wir an, dass wir N freie Bosonen im Volumen V haben. Die Paarverteilungsfunktion $G^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ wird als

$$G^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \equiv \left(\frac{N}{V}\right)^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle\Phi|\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r})|\Phi\rangle$$

definiert, wobei $|\Phi\rangle$ den Vielteichenzustand bezeichnet, in dem sich die Bosonen befinden.

a) (2 Punkte) Wie lautet $G^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ im Zustand, bei dem es $N/2$ Bosonen mit Wellenvektor $\mathbf{k}_1$ und $N/2$ Bosonen mit Wellenvektor $\mathbf{k}_2$ gibt, wobei $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$ gilt? Beobachten Sie für diesen Zustand Bunching oder Antibunching, wenn N groß ist?

b) (2 Punkte) Berechnen Sie $G^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ für den kohärenten Zustand

$$|\alpha\rangle_\mathbf{k} = e^{\alpha a_\mathbf{k}^\dagger - \alpha^* a_\mathbf{k}}|0\rangle \quad ,$$

wobei Sie $\langle N\rangle = \langle a_\mathbf{k}^\dagger a_\mathbf{k}\rangle$ anstatt N in der Definition von $G^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ verwenden. Wie sieht es bei diesem Zustand mit Bunching oder Antibunching aus? Geben Sie eine einfache physikalische Interpretation Ihrer Antwort.