UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 7

Ausgabe: 11.12.2018, Abgabe: 18.12.2018, Übungen: 20.12.2018

Aufgabe 22: Basiswechsel in zweiter Quantisierung (Präsenzaufgabe)

Die Einteilchen-Basiszustände $|\psi_\mu\rangle$ gehen durch eine lineare unitäre Transformation in die neuen Basiszustände $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ (jeweils Orthonormalbasen) über

$$|\tilde{\psi}_\nu\rangle = \sum_\mu |\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|\tilde{\psi}_\nu\rangle.$$

Die Transformationsregeln für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger_\mu$ und $\hat{a}_\mu$ der Einteilchen-Zustände $|\psi_\mu\rangle$ sind analog:

$$\hat{b}^\dagger_\nu = \sum_\mu \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle^* \hat{a}^\dagger_\mu, \quad \hat{b}_\nu = \sum_\mu \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle \hat{a}_\mu.$$

a) Zeigen Sie, dass $\hat{b}^\dagger_\nu$ und $\hat{b}_\nu$ die gleichen (Anti-)Kommutatorrelationen für Fermionen/Bosonen erfüllen, wie $\hat{a}^\dagger_\mu$ und $\hat{a}_\mu$.

b) Beweisen Sie, dass die Zahl der Teilchen (wie alle messbaren Größen) invariant unter einer Basistransformation ist, also, dass gilt

$$\sum_\nu \hat{b}^\dagger_\nu \hat{b}_\nu = \sum_\mu \hat{a}^\dagger_\mu \hat{a}_\mu.$$

c) Wichtiger Spezialfall: *Feldoperatoren*

Die sogenannten Feldoperatoren $\hat{\psi}^\dagger(x)$ und $\hat{\psi}(x)$, die ein Teilchen am (eindimensionalen) Ort erzeugen bzw. vernichten, sind gegeben durch die Basistransformation

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle^* \hat{a}^\dagger_\mu = \sum_\mu \phi^*_\mu(x)\hat{a}^\dagger_\mu, \quad \hat{\psi}(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle \hat{a}_\mu = \sum_\mu \phi_\mu(x)\hat{a}_\mu.$$

Die Koeffizienten $\phi_\mu(x)$ sind die bekannten Wellenfunktionen des entsprechenden Zustandes $|\psi_\mu\rangle$ in der Ortsdarstellung.

Zeigen Sie, dass die Vertauschungsrelationen fermionischer Feldoperatoren gegeben sind durch

$$\left\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\right\} = \left\{\hat{\psi}^\dagger(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\right\} = 0, \quad \left\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\right\} = \delta(x - x')$$

und analog für bosonische Feldoperatoren.

Aufgabe 23: Feldoperatoren und Hamilton-Operator (schriftlich) (6 Punkte)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die kinetische Egergie durch die Feldoperatoren als

$$T = \int \mathrm{d}^3 r\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right) \hat{\psi}(\mathbf{r})$$

dargestellt werden kann.
Hinweis: Beginnen Sie mit der Darstellung $T = \sum_{ij} t_{ij} a_i^\dagger a_j$, wobei $t_{ij} = \left\langle i \middle| -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \middle| j \right\rangle$. Schreiben Sie t_{ij} mit Hilfe der Einteilchenwellenfunktionen in der Ortsdarstellung auf. Drücken Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren durch die Feldoperatoren und die Einteilchenwellenfunktionen aus. Passen Sie bei Integration und Summation auf die Reihenfolge von Operatoren und Funktionen auf.

b) (2 Punkte) Wann darf T in die Form

$$T = \int \mathrm{d}^3 r\ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r})$$

gebracht werden?

c) (2 Punkte) Leiten Sie aus der folgenden *Heisenbergschen Bewegungsgleichung* für die *zeitabhängigen Feldoperatoren* $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ und $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), H\right] ,$$

wobei

$$H = \int \mathrm{d}^3 r\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r})\right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}^3 r'\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) ,$$

$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ und $\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t = 0)$, die *Feldgleichung* her:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r})\right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \int \mathrm{d}^3 r'\ \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) .$$

Aufgabe 24: Ideales Fermigas in zwei Dimensionen (schriftlich) (4 Punkte)

Wir betrachten ein System von vielen schwach gebundenen Elektronen in einem endlichen zweidimensionalen Kasten der Fläche S. Wir idealisieren das System und nehmen freie, nicht wechselwirkende Elektronen mit dem folgenden Hamilton-Operator:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma} .$$

a) (1 Punkte) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\varphi_0\rangle = \prod_{\mathbf{k},\, k \le k_F} \prod_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} |0\rangle$$

der Grundzustand von $\mathcal{H}_0$ ist.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wellenvektor des Grundzustandes k_F als Funktion der Teilchendichte $n_{\mathrm{2D}} = N/S$, wobei N die Anzahl von Elektronen ist.

c) (1 Punkte) Berechnen Sie nun noch die Grundzustandenergie E_0 als Funktion von N und der Fermienergie $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$.