UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 6

Ausgabe: 4.12.2018, Abgabe: 11.12.2018, Übungen: 13.12.2018

Aufgabe 20: Heisenberg-Ferromagnet (schriftlich) (10 Punkte)

Wir betrachten ein n-Spin-System (Spin S) mit dem Hamilton-Operator

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j, \quad J > 0,$$

wobei $\langle i, j \rangle$ bedeutet, dass nur über nächste Nachbarn summiert wird. Jeder Spin hat p nächste Nachbarn.

a) (4 Punkte) Welcher Zustand ist der Grundzustand $|G\rangle$ von H?

1) Zeigen Sie, dass $|G_0\rangle = |S, S, \ldots, S\rangle$ ein Eigenzustand ist. Berechnen Sie die Energie dieses Zustands.
2) Zeigen Sie, dass $|S, S, \ldots, S\rangle$ die kleinstmögliche Energie hat.
(Hinweis: Es genügt, $\langle \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \rangle \leq S^2$ zu zeigen. Warum?)
3) Zeigen Sie, dass H mit $S^-_{\text{tot}} = \sum_i S^-_i$ kommutiert.
Was bedeutet das für die Zustände $(S^-_{\text{tot}})^l\, |S, S, \ldots, S\rangle$ mit $l = 1, 2, \ldots, 2Sn$?
4) Wie sieht der Grundzustand aus? (Beschreiben Sie in Worten).

b) (4 Punkte) Wir suchen jetzt die niedrigsten Anregungen und betrachten den Zustand $|i\rangle = |S \ldots \underbrace{S-1}_{i} \ldots S\rangle$.

1) Wie kann man $|i\rangle$ von $|G_0\rangle$ erhalten? (Hinweis: Wie wirkt S^-_i auf $|G_0\rangle$?)
2) Berechnen Sie $H^z\, |i\rangle$, wobei $H^z = -J \sum_{\langle k,l \rangle} S^z_k S^z_l$. Ist $|i\rangle$ ein Eigenzustand von H^z?
3) Berechnen Sie $H^\perp\, |i\rangle$. Hier $H^\perp = -J \sum_{\langle k,l \rangle} (S^x_k S^x_l + S^y_k S^y_l)$. Ist $|i\rangle$ ein Eigenzustand von $H^\perp$?
4) Betrachten Sie die *Bloch-Zustände* $|\boldsymbol{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i}\, |i\rangle$, die solche lineare Superpositionen von $|i\rangle := |\boldsymbol{r}_i\rangle$ darstellen, die der Translationssymmetrie genügen. Benutzen Sie diese Zustände, um $H^\perp$ zu diagonalisieren.
(Hinweis: Die Summe über die nächsten Nachbarn vom i. Spin $\sum_{j(i)} |\boldsymbol{r}_j\rangle$ lässt sich als $\sum_{\boldsymbol{\tau}} |\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\tau}\rangle$ schreiben, wobei der Satz von Translationsvektoren $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$ für jedes i gleich ist).

5) Welche Energie hat dann der Zustand $|\boldsymbol{k}\rangle$?

c) (2 Punkte) Wir suchen jetzt weitere Anregungen des Systems. Leider ist der Zustand $|\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i,j} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_j)} S_i^- S_j^- |G_0\rangle$ kein Eigenzustand von H. Wir brauchen eine andere Methode, um die Anregungsenergien zu bestimmen.

1) Schreiben Sie H mit Hilfe der Holstein-Primakoff-Transformation um (vgl. Aufgabe 18). (Hinweis: Benutzen Sie die folgenden Näherungen $S_i^+ = \sqrt{2S}a_i$ und $S_i^- = \sqrt{2S}a_i^\dagger$ und berücksichtigen Sie nur Terme der zwei höchsten Ordnungen in S.)

2) Benutzen Sie $a_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ und $a_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} a_{\boldsymbol{k}}$, um H durch $a_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ und $a_{\boldsymbol{k}}$ darzustellen.

Aufgabe 21: Bogoliubov-Transformation für Fermionen (Präsenzaufgabe)

Der Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) Theorie für Supraleitung zufolge werden fermionische Anregungen in einem Supraleiter von einem Hamiltonianer der Form $H = H_0 + H_\Delta$ mit

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k},\sigma}; \quad H_\Delta = \Delta \sum_{\mathbf{k}} \left(c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger + c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\uparrow} \right);$$

beschrieben. $c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$ and $c_{\mathbf{k},\sigma}$ sind die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eines Elecktrons mit Impulse $\mathbf{k}$ und Spin $\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$ und $\epsilon_{\mathbf{k}}$, Δ sind reelle Zahlen.

a) Drücken Sie die Fermionen Zahl N durch die Operatoren $c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$ und $c_{\mathbf{k},\sigma}$ aus. Erhält der Hamiltonian die Fermionen Zahl N? Falls nicht, berechnen Sie $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$.

b) Um einen diagonalen Hamiltonian zu erhalten, führen wir die Operatoren

$$\alpha_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow} - v_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger; \quad \beta_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger;$$

ein, wobei $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ reelle Zahlen sind. Zeigen Sie, dass aus den kanonischen Vertauschungsrelationen für $\alpha_{\mathbf{k}}$, $\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger$, $\beta_{\mathbf{k}}$, and $\beta_{\mathbf{k}}^\dagger$, die Beziehung folgt $u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1$.

c) Stellen Sie H durch die neuen Operatoren dar und finden Sie dann $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$, so dass H diagonal wird.

d) Die neuen Operatoren beschreiben Fermionen, welche üblicherweise Quasiteilchen genannt werden. Drücken Sie die Quasiteilchen Zahl N_q durch die Operatoren $\alpha_{\mathbf{k}}$, $\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger$, $\beta_{\mathbf{k}}$, und $\beta_{\mathbf{k}}^\dagger$ aus. Erhält der Hamiltonian die Quasiteilchen Zahl N_q? Falls nicht, berechnen Sie $\mathrm{d}N_\mathrm{q}/\mathrm{d}t$.