



Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 5

Ausgabe: 27.11.2018, Abgabe: 4.12.2018, Übungen: 6.12.2018

Aufgabe 16: Teilchenzahldarstellung (Präsenzaufgabe)

Ein antisymmetrisierter fermionischer Basiszustand lässt sich ausdrücken als

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle.$$

Der Vakuumzustand $|0\rangle$ ist definiert durch $\hat{a}_i |0\rangle = 0$ ($\forall i$), wobei für die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die folgenden Vertauschungsrelationen gelten:

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

und

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = \{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0$$

- Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen, dass $n_i \in \{0, 1\}$ ($\forall i$). Wie nennt man diese Eigenschaft?
- Der *Teilchenzahloperator* ist definiert durch $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \hat{n}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \\ [\hat{n}_i, \hat{a}_j] &= -\hat{a}_j \delta_{ij} \\ [\hat{n}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \hat{a}_j^\dagger \delta_{ij} \\ [\hat{n}_i, \hat{n}_j] &= 0 \\ \hat{n}_i^2 &= \hat{n}_i \quad (\forall i) \end{aligned}$$

Aufgabe 17: Drei-Ionen Modell (schriftlich) (4 Punkte)

In bestimmten Kristallen sind die Valenzelektronen fest an die Wirtionen gebunden. Betrachten Sie ein Modell mit drei Ionen, die jeweils nur ein Elektron aufnehmen können. \hat{c}_i^\dagger und \hat{c}_i sind die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eines Elektrons am Ion i ($i = 1, 2, 3$).

- (2 Punkte) Wählen Sie eine Basis, die von allen möglichen Zweielektronenzuständen aufgespannt wird (der Spin des Elektrons ist hier nicht wichtig). Schreiben Sie die Operatoren $\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1$, $\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2$ und $\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_3$ in Matrixform in dieser Basis.
- (2 Punkte) Stellen Sie sich vor, dass wir die Elektronen durch Bosonen ersetzen. Wie sehen die Operatoren $\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1$, $\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2$ und $\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_3$ im zwei-Bosonen Unterraum aus?

Aufgabe 18: Bosonisierung des Spins (schriftlich) (6 Punkte)

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren \hat{a}^\dagger und \hat{a} erfüllen die bosonischen Vertauschungsrelationen $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}] = 0$ und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$\begin{aligned}\hat{L}_z &= \hbar (l - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ \hat{L}_+ &= \hbar \sqrt{2l - \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} \\ \hat{L}_- &= \hbar \hat{a}^\dagger \sqrt{2l - \hat{a}^\dagger \hat{a}}\end{aligned}$$

die Drehimpulsalgebra in der Form $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hbar \hat{L}_\pm$ und $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$ erfüllen.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\hat{\mathbf{L}}^2$ und interpretieren Sie die Variable l .

c) (2 Punkte) *Physikalischer Kontext:* Angenommen, man würde einen Ferromagneten als großen Spin beschreiben. Welche Quasiteilchen würden dann von den Operatoren \hat{a}^\dagger und \hat{a} erzeugt/vernichtet? Erhöhen oder verringern diese Quasiteilchen die Magnetisierung?

Anmerkung: Diese Darstellung der Drehimpulsoperatoren geht auf T. Holstein und H. Primakoff zurück (Phys. Rev. **58**, 1098 (1940)).

Aufgabe 19: WKB-Methode (nach Wentzel, Kramers und Brillouin) (Präsenzaufgabe)

Suchen Sie die allgemeine Lösung der eindimensionalen stationären Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m mit Energie E in einem Potenzial $V(x) < E$ mit dem Ansatz $\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}W(x)}$, wobei Sie die Funktion $W(x)$ formell als eine Potenzreihe in \hbar darstellen (WKB-Ansatz)

$$W(x) = W_0(x) + \frac{\hbar}{i}W_1(x) + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 W_2(x) + \dots$$

Berücksichtigen Sie nur die Terme nullter und erster Ordnung in \hbar , lösen Sie die entsprechenden Differentialgleichungen und finden Sie in dieser Näherung die Wellenfunktion $\psi(x)$. Wie sieht die Lösung im Bereich mit $V(x) > E$ aus?