UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 3

Ausgabe: 13.11.2018, Abgabe: 20.11.2018, Übungen: 22.11.2018

Aufgabe 10: Fermis Goldene Regel für periodische Störung (schriftlich) (5 Punkte)

Verwenden Sie die zeitabhängige Störungstheorie für das Problem $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$ mit der periodischen Störung

$$\hat{V}(t) = \hat{F}e^{i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{-i\omega t} ,$$

die am Zeitpunkt $t = 0$ einsetzt. $\hat{F}$ ist hierbei ein zeitunabhängiger Operator.

a) (2 Punkte) Betrachten Sie den Übergang zwischen den beiden Eigenzuständen $|n\rangle$ und $|m\rangle$ von $\hat{H}_0$ mit den Energien $E_n = \hbar\omega_n$ und $E_m = \hbar\omega_m$. Vor der Störung befindet sich das System im Zustand $|n\rangle$. Berechnen Sie die Übergangsamplitude $c_{mn}^{(1)}$ in erster Ordnung Störungstheorie in Abhängigkeit von $\hat{F}$ und $\hat{F}^\dagger$.

b) (1 Punkt) Diskutieren Sie die Übergangsamplitude in der Näherung, wenn $\omega \approx \omega_{mn} = \omega_m - \omega_n$ gilt.

c) (2 Punkte) Betrachten Sie den Grenzfall $t \to \infty$ und berechnen Sie die Übergangsrate $W_{mn} = \frac{d}{dt}|c_{mn}^{(1)}(t)|^2$.

Aufgabe 11: Zeitabhängige Störungstheorie (schriftlich) (5 Punkte)

Ein linearer harmonischer Oszillator mit der Masse m und der Ladung q befinde sich in einem elektrischen Wechselfeld ($\hat{\mathbf{e}}_z$: Einheitsvektor in z-Richtung):

$$\mathbf{F}(t) = F\hat{\mathbf{e}}_z \cos\omega t.$$

Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Abhängigkeit des Erwartungswertes des elektrischen Dipolmoments

$$\langle\hat{p}\rangle = \langle\psi|\, qz\, |\psi\rangle$$

von der Frequenz ω. Nehmen Sie dazu an, dass sich vor dem Einschalten des Feldes zur Zeit $t = 0$ der Oszillator im Eigenzustand $|E_n^{(0)}\rangle = |n\rangle$ befand.

Aufgabe 12: **Greensche Funktion der stationären Schrödingergleichung (Präsenzaufgabe)**

a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf die Form

$$\left(\Delta + k^2\right) \psi(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \tag{1}$$

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, definiert durch

$$\left(\Delta + k^2\right) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \ ,$$

zur Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (1).

Hinweis:

- Finden Sie zuerst eine Darstellung der Fourier-transformierten Greenschen Funktion $G(\mathbf{q})$.
- Verwenden Sie $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ als Polarachse und bringen Sie $G(\mathbf{R})$ auf die Form

$$G(\mathbf{R}) = \frac{i}{8\pi^2 R} \left(D_+ + D_-\right) \ ,$$

mit

$$D_\pm = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqR}}{q \pm k} dq \ .$$

- Betrachten Sie zuerst $k' = k \pm i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) anstatt k, benutzen Sie dann den Residuensatz (im Zusammenhang mit der Lemma von Jordan), um $D_\pm$ zu bestimmen, und lassen Sie anschließend ϵ gegen Null streben.