UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 13

Ausgabe: 5.2.2019, Abgabe: 12.2.2019, Übungen: 14.2.2019

Aufgabe 39: **Lösung der Dirac-Gleichung für freie Teilchen (schriftlich) (5 Punkte)**

Die freie Dirac-Gleichung ist gegeben durch

$$\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\Psi = 0.$$

Zur Lösung wählen wir folgenden Ansatz:

$$\Psi_r^{(+)} = u_r(\mathbf{k})e^{-ik_\mu x^\mu} \qquad \text{Lösungen positiver Energie,} \tag{1}$$

$$\Psi_r^{(-)} = v_r(\mathbf{k})e^{+ik_\mu x^\mu} \qquad \text{Lösungen negativer Energie,} \tag{2}$$

mit $r \in \{1,2\}$ und $k^0 = |E|/\hbar c > 0$.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Wellenfunktionen für ein ruhendes Teilchen aus der Dirac-Gleichung mit Hilfe des gegebenen Ansatzes. Wählen Sie dabei die Spinoren

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\chi}_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_r(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\chi}_r \end{pmatrix}; \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\chi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $k\!\!\!/ k\!\!\!/ = k_\mu k^\mu$ und damit auch $(\hbar k\!\!\!/ \pm mc)(\hbar k\!\!\!/ \mp mc) = 0$ gilt.

c) (1 Punkt) Überzeugen Sie sich, dass aus dem Ergebnis von (b) folgt, dass die Spinoren $u_r(\mathbf{k})$ und $v_r(\mathbf{k})$ für endliche Impulse direkt gegeben sind durch

$$u_r(\mathbf{k}) = \frac{c}{N}(\hbar k\!\!\!/ + mc)u_r(0) \quad \text{und} \quad v_r(\mathbf{k}) = \frac{c}{N}(-\hbar k\!\!\!/ + mc)v_r(0)\,,$$

mit einer noch zu bestimmenden Normierung N. Bestimmen Sie damit die expliziten Ausdrücke für $u_r(\mathbf{k})$ und $v_r(\mathbf{k})$, wobei Sie die Standarddarstellung der γ-Matrizen verwenden.

d) (1 Punkt) Die Normierung soll so gewählt werden, dass die Spinoren $u_r(\mathbf{k})$ und $v_r(\mathbf{k})$ orthonormal sind, also dass gilt:

$$\overline{u}_r(\mathbf{k})u_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}, \quad \overline{v}_r(\mathbf{k})v_s(\mathbf{k}) = -\delta_{rs}, \quad \overline{u}_r(\mathbf{k})v_s(\mathbf{k}) = 0.$$

Hinweis: Demonstrieren Sie zuerst, dass $\overline{u}_r(\mathbf{k}) = c\overline{u}_r(0)(\hbar k\!\!\!/ + mc)/N$ sowie $\overline{u}_r(0)k\!\!\!/ u_s(0) = k_0\delta_{rs}$ gilt. Leiten Sie die entsprechenden Beziehungen auch für $\overline{v}_r(\mathbf{k})$ her.

Aufgabe 40: **Majorana-Fermionen (Präsenzaufgabe)**

a) Zeigen Sie, dass die Dirac-Matrizen in der Majorana-Darstellung, z.B. in der Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = i \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \gamma^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} ,$$

(σ_i sind Pauli-Matrizen) die Konjugationseigenschaften und Antikommutatorrelationen erfüllen:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} .$$

b) Überzeugen Sie sich, dass die Dirac-Gleichung in der Majorana-Darstellung reell wird. Zeigen Sie dann, dass man jeden Dirac-Spinor Ψ als $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ schreiben kann, wobei Ψ_i Majorana-Spinoren sind.
Hinweis: Majorana-Spinoren sind zu sich selber ladungskonjugiert, was in der Majorana-Darstellung $\Psi^c \equiv \Psi^* = \Psi$ bedeutet.

Aufgabe 41: **Gordon-Zerlegung des Dirac-Stroms (schriftlich) (5 Punkte)**

Wir wollen einen Zusammenhang zwischen der Dirac-Stromdichte $j^\mu = c\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ mit der Klein-Gordon-Stromdichte $\frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*\partial^\mu\Psi - \Psi\partial^\mu\Psi^*\right)$ herstellen. Dazu betrachten wir die Dirac-Gleichung für ein Elektron im elektromagnetischen Feld (in kovarianter Form):

$$\gamma^\nu \left(i\hbar\partial_\nu - eA_\nu\right)\Psi = mc\Psi$$

und deren adjungierte Form

$$\left(-i\hbar\partial_\nu - eA_\nu\right)\overline{\Psi}\gamma^\nu = mc\overline{\Psi} .$$

a) (2 Punkte) Zerlegen Sie zuerst die Dirac-Stromdichte in zwei gleiche Teile und ersetzen Sie im ersten Teil $\gamma^\mu\Psi$ durch den Ausdruck, der sich aus der von links mit γ^μ multiplizierten Dirac-Gleichung ergibt, und im zweiten Teil $\overline{\Psi}\gamma^\mu$ durch den Ausdruck, der sich aus der von rechts mit γ^μ multiplizierten adjungierten Dirac-Gleichung ergibt.

b) (2 Punkte) Zerlegen Sie nun die (tensoriellen) Produkte $\gamma^\mu\gamma^\nu$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil (der letzte wird als *Spinoperator* bezeichnet),

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}\mathbb{1} + \sigma^{\mu\nu} ,$$

und vereinfachen Sie den Ausdruck für die Stromdichte weiter.

c) (1 Punkt) Interpretieren Sie die resultierenden Terme. Der zur Klein-Gordon-Stromdichte analoge Anteil (inklusive des Terms, der das elektromagnetische Feld enthält) wird als Leitungsstromdichte bezeichnet, der zusätzliche Term, der den Spinoperator enthält, als Polarisationsstromdichte.