UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 12

Ausgabe: 29.1.2019, Abgabe: 5.2.2019, Übungen: 7.2.2019

Aufgabe 36: Lagrange-Formalismus der Elektrodynamik (Präsenzaufgabe)

Mithilfe des Lorentz-kovarianten Lagrange-Formalismus, können die Wechselwirkungen zwischen geladenen Teilchen und dem elektromagnetischen Feld beschrieben werden.

a) Ausgehend von der Lagrange-Funktion für Teilchen im elektromagnetischen Feld,

$$L = -mu_\mu u^\mu - qu_\mu A^\mu \ ,$$

verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen um die Vierer-Kraft zu berechnen.

b) Teilen Sie diese in Raum- und Zeit-Komponenten auf.

Aufgabe 37: Die Brachistochronenproblem (schriftlich) (5 Punkte)

Ein Massepunkt der Masse m gleitet reibungslos auf einer Bahn ausschließlich unter dem Einfluß der Gravitationskraft g. Welche Form $y(x)$ muss die Bahn haben um der Laufzeit zwischen zwei Punkten $A = (0,0)$ und $B = (x_b, y_b)$ zu minimieren? Die Anfangsgeschwindigkeit in A ist 0.

a) (2 Punkte) Schreiben Sie die Zeit als Funktional. *Hinweis:* Verwenden Sie $\frac{d\,y(x)}{dt} = \frac{d\,y(x)}{dx}\frac{d\,x}{dt}$.

b) (1 Punkt) Minimieren Sie das Funktional mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung.

c) (2 Punkte) Schreiben Sie die Bedingung als $\frac{d}{dx}\left[y(1+y'^2)\right] = 0$ ($y' = \frac{d\,y(x)}{dx}$) und zeigen Sie, dass die Parameterdarstellung

$$x = c(\theta - \sin\theta); \quad y = c(1-\cos\theta);$$

mit c einer Konstanten, eine Lösung ist.

Aufgabe 38: **Hamilton-Dichte (schriftlich) (5 Punkte)**

Weil die dynamischen Variablen in der Elektrodynamik Felder sind, ist die Lagrange-Funktion das Integral $L = \int d^3r \mathcal{L}(\mathbf{r})$ über die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(A_\mu, \dot{A}_\mu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mu_0 j_\mu A^\mu \ .$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie den kanonisch konjugierten Impuls zur Variablen A_μ.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Hamilton-Dichte für den Fall $j^\mu = 0$.

c) (2 Punkte) In einem Inertialsystem S beträgt den Dichte der elektromagnetischen Energie einer Welle u. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich ein anderes Inertialsystem S' in Bezug auf S in Richtung des Wellenvektors $\mathbf{k}$ bewegen muss, so dass sich die Energiedichte halbiert ($u' = u/2$). Betrachten Sie dazu das elektrische Feld $\mathbf{E} = E\,\mathbf{e}_y$ und Wellenvektor $\mathbf{k} = k\,\mathbf{e}_x$.