UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 11

Ausgabe: 22.1.2019, Abgabe: 29.1.2019, Übungen: 31.1.2019

Aufgabe 33: Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen (Präsenzaufgabe)

Analog zum Vierer-Ort und -Impuls definiert man die Vierer-Stromdichte $j^\nu = (c\rho, \mathbf{j})$ und das Vierer-Potential $A^\nu = (\Phi/c, \mathbf{A})$. Desweiteren führt man den antisymmetrischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ein:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die zwei inhomogenen Maxwellgleichungen gegeben sind durch

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu.$$

b) Überprüfen Sie, dass die zwei homogenen Maxwellgleichungen enthalten sind in

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Gehen Sie wie folgt vor :

i) Berechnen Sie $F_{\mu\nu}$ aus $F^{\mu\nu}$.

ii) Was passiert bei einer Permutation von μ, ν und λ?

iii) Überlegen Sie sich den Fall zweier gleicher Indizes, z.B. $\mu = \nu$.
Hinweis : $F^{\lambda\nu} = -F^{\nu\lambda}$

iv) Behandeln Sie explizit die übrigen 4 Fälle.

c) Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ invariant unter der Transformation

$$A^\nu \to A^\nu + \partial^\nu \Lambda$$

ist, wobei Λ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist. Wie nennt man eine solche Eigenschaft/Transformation?

d) Berechnen Sie den Ausdruck $\partial_\mu j^\mu$. Schreiben Sie die entstehende Gleichung in die Darstellung mit ∇ und ∂_t um. Welcher physikalische Sachverhalt wird hiermit beschrieben?

Aufgabe 34: Lorentz-Transformation von elektromagnetischen Feldern (schriftlich) (7 Punkte)

Man betrachte uniforme und konstante elektromagnetische Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ $(\mathbf{E} \nparallel \mathbf{B})$ in einem Bezugssystem $\mathcal{R}$.

1. Finden Sie ein Bezugssystem $\mathcal{R}'$, in dem für die transformierten Felder $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}'$ gilt.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die transformierten Felder $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$ im Falle eines allgemeinen Boosts mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$.
Hinweise: Betrachten Sie die Komponenten der Felder, die parallel und senkrecht zu $\mathbf{v}$ sind. Legen Sie z.B. die x-Achse parallel zu $\mathbf{v}$ fest.

b) (1 Punkt) Betrachten Sie den Fall, wenn $\mathbf{v}$ in der Ebene von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ liegt. Kann man mit einem solchen Boost $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}'$ erreichen?
Hinweis: Nutzen Sie aus, dass $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ eine Invariante der Lorentz-Transformation ist.

c) (2 Punkte) Betrachten Sie den Fall, wenn $\mathbf{v}$ senkrecht zur Ebene von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ liegt. Versuchen Sie, eine Lösung des Problems in diesem Fall zu finden. Ist es immer möglich?
Hinweis: Sie können $\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = 0$ ausnutzen.

d) (1 Punkt) Ist die gefundene Lösung eindeutig?

2. (1 Punkt) Geben Sie die Beträge von E' und B' im Bezugssystem $\mathcal{R}'$ an. *Hinweis*: Nutzen Sie aus, dass $\mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2$ eine Invariante der Lorentz-Transformation ist.

Aufgabe 35: Kovariante Formulierung der Lorentzkraft (schriftlich) (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die kovariante Bewegungsgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}u^\nu}{\mathrm{d}\tau} = qF^{\nu\mu}u_\mu$$

die Lorentzkraft enthält. Da es sich um eine vierkomponentige Gleichung handelt, erhalten Sie noch eine weitere Gleichung. Leiten Sie aus dieser eine Erhaltungsgröße ab. Nehmen Sie dazu an, dass das elektrische Feld $\mathbf{E}$ von einem zeitunabhängigen Potential ϕ erzeugt wird und schreiben Sie damit die rechte Seite als Zeitableitung.