UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 10

Ausgabe: 15.1.2019, Abgabe: 22.1.2019, Übungen: 24.1.2019

Aufgabe 30: Lösung der Wellengleichung (schriftlich) (4 Punkte)

a) (2 Punkte) Lösen Sie die homogene Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) F(\mathbf{r}, t) = 0$$

durch eine Fourier-Transformation.

Hinweis: Fourier-Transformation:

$$F(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k \int d\omega e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} F(\mathbf{k}, \omega)$$

b) (2 Punkt) Zeigen Sie, dass man für eine Quelle bei $\mathbf{r} = 0$ und $t = 0$ eine Kugelwelle erhält, deren Wellenfront aus Punkten $\mathbf{r}$ mit $|\mathbf{r}|^2 - c^2t^2 = 0$ besteht.

Hinweis: Nutzen Sie die Randbedingungen $F(\mathbf{r}, 0) = 0$ und $\dot{F}(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r})$ in der Lösung von (a).

Aufgabe 31: Zeitdilatation und Längenkontraktion (Präsenzaufgabe)

Zeigen Sie mit Hilfe der Lorentz-Transformation, dass

a) der Zeitabstand zwischen zwei Ereignissen, die an einem Ort im ruhenden Inertialsystem $\mathcal{R}$ stattfinden, kürzer ist als der Zeitabstand zwischen diesen Ereignissen in einem im Bezug auf $\mathcal{R}$ mit einer konstanten Geschwindigkeit v bewegenden Inertialsystem $\mathcal{R}'$.

b) die Länge eines Stabes, die zu einem Zeitpunkt in $\mathcal{R}$ bestimmt wird, größer ist als die Länge dieses Stabes, die zu einem Zeitpunkt in $\mathcal{R}'$ bestimmt wird.

Aufgabe 32: **Addition von Geschwindigkeiten (schriftlich) (6 Punkte)**

Führt man zwei spezielle Lorentz-Transformationen, deren Geschwindigkeitsvektoren nicht in die gleiche Richtung zeigen, hintereinander aus, so ergibt sich eine spezielle Lorentz-Transformation mit einer zusätzlichen Raumdrehung. Im Folgenden nehmen wir an, dass die erste Transformation in z-Richtung und die zweite senkrecht dazu in x-Richtung erfolgt.

a) (2 Punkt) Ermitteln Sie die Matrix $T^{\mu}_{\ \nu}$ der resultierenden Transformation durch Ausführung der beiden speziellen Transformationen mit den Geschwindigkeiten v in z-Richtung und u in x-Richtung. Nutzen Sie dann aus, dass die resultierende Transformation durch eine spezielle Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $\mathbf{w}$ und eine räumliche Drehung um den Winkel α dargestellt werden kann, d.h. $T = R(\alpha)L(\mathbf{w})$, um die folgende Relation zu beweisen:

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{u^2 + v^2 - \frac{u^2 v^2}{c^2}}. \qquad (1)$$

Hinweis : Die Drehung beinflusst bestimmte Komponenten von T nicht.

b) (2 Punkte) Ist das Ergebnis (1) symmetrisch in u und v? Bekommt man die selbe Gesamttransformation, wenn man erst in x- und dann in z-Richtung transformiert? Welche Koordinatentransformation verhält sich genauso?

c) (2 Punkte) Eine spezielle Lorentz-Transformation in $\mathbf{w}$-Richtung erhält man aus der bekannten Transformation in z-Richtung, indem man zuerst das Koordinatensystem so dreht, dass $\mathbf{w}$ parallel zu z liegt, danach entlang z transformiert, und dann die Drehung rückgängig macht. Zeigen Sie, dass sich damit ergibt (y-Komponente weggelassen) :

$$L(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(w) & -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & -\gamma(w)\frac{w_z}{c} \\ -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & 1 + (\gamma(w) - 1)\frac{w_x^2}{w^2} & (\gamma(w) - 1)\frac{w_x w_z}{w^2} \\ -\gamma(w)\frac{w_z}{c} & (\gamma(w) - 1)\frac{w_x w_z}{w^2} & 1 + (\gamma(w) - 1)\frac{w_z^2}{w^2} \end{pmatrix}.$$