UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 1

Ausgabe: 30.10.2018, Abgabe: 6.11.2018, Übungen: 8.11.2018

Aufgabe 4: Kopplung zweier Spins (schriftlich) (5 Punkte)

Zur Beschreibung von Systemen mit 2 Elektronen (z.B. neutrales Heliumatom, H_2-Molekül) betrachten wir die Kopplung von 2 Spin-$\frac{1}{2}$-Systemen.

a) (1 Punkt) Welche Dimension hat der Produktraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ des Systems? Stellen Sie eine einfache Basis von $\mathcal{H}$ für zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Systeme $\mathcal{H}^{(1)}$ und $\mathcal{H}^{(2)}$ mit den Basen $\{|\uparrow^{(1)}\rangle, |\downarrow^{(1)}\rangle\} \subset \mathcal{H}^{(1)}$, $\{|\uparrow^{(2)}\rangle, |\downarrow^{(2)}\rangle\} \subset \mathcal{H}^{(2)}$ auf.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie durch Anwendung der Leiteroperatoren des Gesamtspins alle orthogonalen Eigenzustände von $s^2 = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)^2$. Welche Symmetrieeigenschaften bzgl. Teilchenaustausch haben diese Zustände?

c) (2 Punkte) Die Gesamtwellenfunktion des Systems, bestehend aus Spin- und Ortswellenfunktion, muss antisymmetrisch gegenüber Teilchenaustausch sein. Welche Kombinationen an Spin- und Ortswellenfunktion sind damit möglich? Ordnen Sie die Begriffe *Singulett-* und *Triplett-*Zustände zu.

d*) Skizzieren sie das Termschema von Helium für die Hauptquantenzahlen $n_1 = 1$, $n_2 = 1, 2$. Trennen Sie die möglichen Zustände nach den Werten des Gesamtspins, d.h. in Triplett- und Singulettzustände. Geben Sie jeweils die entsprechende Notation $(n_2\,{}^{2S+1}L_J)$ der Zustände an. Für welche Zustände ist der Begriff *Feinstrukturaufspaltung* relevant und was ist die Ursache für die Feinstruktur?

Aufgabe 5: Clebsch-Gordan-Koeffizienten (Präsenzaufgabe)

Gegeben seien zwei Drehimpulse $\mathbf{J}_1$ und $\mathbf{J}_2$, deren Vektorsumme als Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ bezeichnet wird. Die Eigenzustände $|j, m, j_1, j_2\rangle$ zu den kommutierenden Observablen $\mathbf{J}^2$, J_z, $\mathbf{J}_1^2$ und $\mathbf{J}_2^2$ lassen sich nach den Produktzuständen $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ entwickeln,

$$|j, m, j_1, j_2\rangle = \sum_{j_1', j_2'. m_1', m_2'} |j_1', j_2', m_1', m_2'\rangle\langle j_1', j_2', m_1', m_2'|j, m, j_1, j_2\rangle.$$

a) Leiten Sie durch geschicktes Anwenden der Leiteroperatoren $J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm}$ eine Beziehung zwischen den Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu m und $m\pm1$ her. Überlegen Sie sich, wie Sie zusammen mit der Relation

$$\sum_{m_1+m_2=m} |\langle j_1, j_2, m_1, m_2|j, m, j_1, j_2\rangle|^2 = 1$$

alle Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu festen j_1, j_2 und j bestimmen können.

b) Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten zum maximalen $j = j_1 + j_2$ lassen sich nach einem einfachen Verfahren durch wiederholte Anwendung des Absteigeoperators J_- bestimmen. Berechnen Sie

$$C^{j_1+j_2=\frac{5}{2},m_1+m_2}_{1,m_1,\frac{3}{2},m_2} = \langle j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, m_1, m_2 | j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = j_1 + j_2 = \frac{5}{2},\, m = m_1 + m_2 \rangle$$

für $-\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Hinweise:

- Starten Sie mit $|j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{5}{2}, m = \frac{5}{2}\rangle$ und benutzen Sie den Absteigeoperator J_-, um $|j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{5}{2},\, m = \frac{3}{2}\rangle$ zu bekommen. Es gilt

$$J_\pm \, |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \, |j, m \pm 1\rangle \, .$$

- Der Überlapp mit $\langle j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, m_1,\, m_2|$ ergibt die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

- Beachten Sie, dass die Clebsch-Gordan-Koeffizienten symmetrisch sind, d.h.

$$C^{j,m}_{j_1,m_1,j_2,m_2} = C^{j,-m}_{j_1,-m_1,j_2,-m_2}.$$

Wenden Sie die Tatsache an, dass $\langle j_1,\, j_2,\, j, m | j_1,\, j_2,\, j', m' \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'}$, um

$$C^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_{1,m_1,\frac{3}{2},m_2} = \langle j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, m_1, m_2 | j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{3}{2},\, m = \frac{3}{2} \rangle$$

für die möglichen m_1/m_2-Kombinationen zu berechnen.

Aufgabe 6: Abbildung SU(2) $\longrightarrow$ SO(3) (schriftlich) (5 Punkte)

Um zwischen den Matrizengruppen SU(2) und SO(3) eine Verbindung herzustellen, betrachet man die Transformation

$$\mathbf{r} \longmapsto \mathbf{r}' \equiv R\mathbf{r} \quad \text{mit} \quad U\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} U^\dagger = \mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\sigma} \, ,$$

wobei $U \in \mathrm{SU}(2)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, und $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^\mathrm{T}$ den Vektor der Pauli-Matrizen bezeichnet.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass R ein linearer Operator ist und dass dieser Operator Winkel und Abstände zwischen Vektoren nicht verändert.

Hinweis: betrachten Sie, wie sich das Skalarprodukt von zwei Vektoren bei dieser Transformation verändert und benutzen Sie dabei die Eigenschaft $\mathrm{Tr}\{\sigma_i \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass in der Basis der kartesischen Koordinaten die Komponenten von R als

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left\{ \sigma_i U \sigma_j U^\dagger \right\}$$

ausgedrückt werden können.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Matrize R für den Fall $U = e^{i\alpha\sigma_z}$. Welcher Transformation des dreidimensionalen Vektorraums entspricht dann R im Allgemeinen?

Hinweis: Benutzen Sie $e^{i\alpha \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{1} \cos\alpha + i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin\alpha$, das Ergebnis der Aufgabe 3c.