UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Mónica Benito
http://bit.ly/2018qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2018/19 - Übungsblatt 2

Ausgabe: 6.11.2018, Abgabe: 13.11.2018, Übungen: 15.11.2018

Aufgabe 7: Affine Abbildungen (Präsenzaufgabe)

Eine affine Abbildung ist eine Abbildung zwischen zwei Räumen, bei der Kollinearität, Parallelität und Teilverhältnisse bewahrt bleiben.

a) Im eindimensionalen Raum ist eine Translation gegeben durch $x' = x + a$ und eine Skalierung durch $x' = e^b x$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass jede Kombination aus beiden Transformationen Nicht-Abelsch ist.

b) Wie sieht der Erzeuger von Translationen in 3 Dimensionen aus?

Aufgabe 8: Spin-Orbit-Kopplung (schriftlich) (5 Punkte)

Ein gebundenes Elektron bewegt sich im elektrostatischen Feld des Kerns. Da es ein intrinsisches magnetisches Moment besitzt, kommt es zu einer Wechselwirkung zwischen dem Spin $\mathbf{s}$ und dem Bahndrehimpuls $\mathbf{l}$. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall $l = 1$.

a) (3 Punkt) Drücken Sie die Zustände $|l, s, J, M\rangle$ in der Basis des Gesamtdrehimpulses durch die Zustände $|l, m_l, s, m_s\rangle$ aus. Schlagen Sie dazu die *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* in einer Tabelle[1] nach und berechnen Sie diese zusätzlich mit der Methode aus Aufgabe 5.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung des Gesamtdrehimpulses $\hat{\mathbf{j}}^2$ in der Basis $\{l, m_l, s, m_s\}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Relation aus Aufgabe 2 c).

[1] pdg.lbl.gov/2002/clebrpp.pdf

Aufgabe 9: Permutationsgruppe S_4 und ihre irreduziblen Darstellungen (schriftlich) (5 Punkte)

Betrachten Sie alle möglichen Permutationen von 4 Teilchen.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass diese Permutationen eine Gruppe bilden.

b) (1 Punkt) Erstellen Sie alle möglichen Young-Diagramme für diese Gruppe. Verteilen Sie die Zahlen von 1 bis $N = 4$ auf die Kästchen dieser Diagramme so, dass Sie die sogenannten Normaltableau Θ_λ bekommen, wobei λ die entsprechende Zykelstruktur bezeichnet. Beschreiben Sie die Operationen, die im Zusammenhang mit den Young-Diagrammen zu den irreduziblen Darstellungen von S_4 führen.
Hinweis: Im Normaltableau treten die Zahlen von 1 bis N von links nach rechts und von der oberen Zeile zu der unteren Zeile (wie man Bücher liest) in der strikten aufsteigenden Reihenfolge auf.

c) (1 Punkt) Die Spur der Matrix $P = \mathcal{D}_i(p)$, die dem Gruppenelement p in der Darstellung $\mathcal{D}_i$ entspricht, heißt *Charakter* des Elements p in dieser Darstellung: $\chi_i(p)$. Zeigen Sie, dass alle Elemente einer Klasse den gleichen Charakter besitzen.

d) (1 Punkt) Die Anzahl von Young-Diagrammen gibt die Anzahl der Klassen in einer Gruppe an, und die Anzahl der Klassen entspricht der Anzahl an irreduziblen Darstellungen. Bestimmen Sie damit die Anzahl der irreduziblen Darstellungen von S_4. Bestimmen Sie dann auch die Dimensionen dieser Darstellungen, indem Sie die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_i [\chi_i(\Theta_\lambda)]^* \chi_i(\Theta_\lambda) = \frac{n}{n_\lambda},$$

auf die Klasse anwenden, die nur das triviale Element enthält (für jede Gruppe gibt es immer eine solche Klasse, hier ist es $\Theta_{[4]}$). Hier ist $\chi_i(\Theta_\lambda)$ der Charakter der Klasse Θ_λ (aller Elemente dieser Klasse) in der Darstellung $\mathcal{D}_i$, n ist die Anzahl der Elemente in der ganzen Gruppe und n_λ ist die Anzahl der Elemente in der Klasse Θ_λ.
Hinweis: Die Darstellungen der trivialen Elemente sind immer Einheitsmatrizen der jeweiligen Dimension.

e) (1 Punkt) Erstellen Sie alle möglichen Standardtableaus für diese Gruppe. Welchen Zusammenhang sehen Sie zwischen der Anzahl der Standardtableaus und der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen?
Hinweis: Im Standardtableau treten die Zahlen von 1 bis N in einer aufsteigenden (aber nicht unbedingt ununterbrochenen) Reihenfolge, in jeder Zeile von links nach rechts und in jeder Spalte von oben nach unten, auf.