Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2015ik4

Universität Konstanz

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2015 - Übungsblatt 12
Ausgabe: 8.7., Abgabe: 15.7., Übungen: 17.7.

Aufgabe 30: Spin und Pauli-Matrizen (schriftlich - 7 Punkte)

In der Vorlesung wurden folgende Beziehungen für Drehimpulsoperatoren gefunden:

$$L^2 |lm\rangle = \hbar^2 l(l+1) |lm\rangle ,$$
$$L_z |lm\rangle = \hbar m |lm\rangle ,$$
$$L_\pm |lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)} |l, m\pm 1\rangle .$$

a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Matrixdarstellung von $S_\pm$ und S^2 für den Spinoperator $\boldsymbol{S}$ ("Eigendrehimpuls") mit $l = s = \frac{1}{2}$.

   Hinweise: $\boldsymbol{S}$ befolgt wie $\boldsymbol{L}$ die obigen Beziehungen. Benennen Sie die beiden möglichen Zustände $\left|l{=}\frac{1}{2}, m{=}\frac{1}{2}\right\rangle = |\uparrow\rangle$ und $\left|l{=}\frac{1}{2}, m{=}-\frac{1}{2}\right\rangle = |\downarrow\rangle$.

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie nun die Matrixdarstellung für die Komponenten des Spinoperators $\boldsymbol{S}$.

c) (1 Punkt) Finden Sie damit die Beziehung zwischen dem Spinoperator $\boldsymbol{S}$ und den sog. Pauli-Matrizen.

Aufgabe 31: Zwei-Niveausystem (Spin-Polarisation) (mündlich)

a) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen (reinen) normierten Zustand $|\psi\rangle$ im zwei-dimensionalen Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ (mit Standardskalarprodukt) gilt

$$\langle\psi|\boldsymbol{\sigma}|\psi\rangle = \boldsymbol{n}$$

   mit $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ einem normierten Richtungsvektor ($|\boldsymbol{n}| = 1$). $\boldsymbol{\sigma}$ ist der Vektor gebildet mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Es gibt also zu jedem $|\psi\rangle$ eine Richtung $\mathbf{n}$, so dass der Erwartungswert des Vektors $\boldsymbol{\sigma}$ in Richtung $\mathbf{n}$ zeigt.

b) Bei einer Messung an diesem Zustand wird die Wahrscheinlichkeit p bestimmt, den Eigenwert $+1$ von σ_z zu finden. Zeigen Sie, dass $p = \frac{1}{2}(1 + n_z)$ gilt. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert $+1$ von σ_x zu messen?

<u>Aufgabe 32:</u> Feinstruktur (Spin-Bahn-Wechselwirkung) **(mündlich)**

Ein Elektron mit Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L}$ (wobei $l \geq 0$ und ganzzahlig) und Spin $\boldsymbol{S}$ (wobei s=1/2) befinde sich in einem schwachen homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$. Vernachlässigt man zunächst die Spin-Bahn-Wechelwirkung $H_{\text{SB}} \simeq 0$, so lautet der Hamiltonoperator $H = H_0 + H_m$ mit $H_0 = \left(\frac{p^2}{2m} + V(r)\right)\mathbb{1}$ und $H_m = \frac{\mu_B}{\hbar}(\boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S}) \cdot \boldsymbol{B}$ wobei μ_B das Bohrsche Magneton ist. Die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung ist die Pauli-Gleichung

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \psi_+(\boldsymbol{r}, t) \\ \psi_-(\boldsymbol{r}, t) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \psi_+(\boldsymbol{r}, t) \\ \psi_-(\boldsymbol{r}, t) \end{pmatrix}.$$

a) Welche Basis diagonalisiert H_0 und auch H_m? Zeigen Sie, dass in dieser Basis die Energieaufspaltung im Magnetfeld B gegeben ist durch:

$$\Delta E_{n,l,m_l,m_s} = \mu_B(m_l + 2m_s)B.$$

b) Im Folgenden wird der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ des Elektrons eingeführt (Drehimpulskopplung). Sind die Basiszustände aus a) Eigenzustände von J^2 und J_z? Welche Dimension hat der Produktraum $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{H}_{s=1/2}$ in dem H wirkt (bei festem l)?

c) Gesucht sind die Eigenzustände $|j, m_j, l, s\rangle$ von J^2, J_z, L^2, S^2. Die Eigenzustände in der *gekoppelten Basis* lassen sich durch Entwicklung der Form

$$|j, m_j, l, s\rangle = \sum_{m_l, m_s} \langle l, m_l, s, m_s | j, m_j, l, s\rangle |l, m_l, s, m_s\rangle$$

bestimmen. Die Koeffizienten $\langle l, m_l, s, m_s | j, m_j, l, s\rangle$ werden *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* genannt.

Zeigen Sie $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} = (L_+S_- + L_-S_+)/2 + L_zS_z$ und damit durch Anwendung von J^2 und J_z, dass gilt

$$|j = l + \frac{1}{2}, m_j = l + \frac{1}{2}, l, s = \frac{1}{2}\rangle = |l, m_l = l, s = \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}\rangle,$$

wenn J^2 und J_z die bekannten Eigenwertgleichungen des Drehimpulses erfüllen. (Weitere Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind schwieriger zu bestimmen.)

Überlegen Sie sich, dass für die Quantenzahl j von J^2 gilt: $|l - s| \leq j \leq l + s$ (Dreiecksregel).

d) Die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten des Bahndrehimpulses $\boldsymbol{L}$ und des Spins $\boldsymbol{S}$ führt auf die Spin-Bahn-Kopplung (ein rein relativistischer Effekt) mit dem Hamiltonoperator $H_{\text{SB}} = \frac{1}{2m^2c^2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}V(r)$, wo $V(r) = e\phi(r)$ die potentielle Energie im elektrischen Potential $\phi(r)$ des Atomkerns ist. Für die Diskussion der Spin-Bahn-Wechselwirkung wird im folgenden das Magnetfeld $\boldsymbol{B} \equiv 0$ (d.h. $H_m \equiv 0$) gesetzt, so dass der Hamiltonoperator des Elektrons jetzt durch $H = H_0 + H_{\text{SB}}$ gegeben ist.

(i) Welche Form des Potentials $\phi(r)$ führt auf

$$H_{\text{SB}} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S},$$

(in SI Einheiten) wobei Z die Kernladungszahl ist?

(ii) Berechnen Sie die Kommutatoren $[H_{\text{SB}}, L_z]$ und $[H_{\text{SB}}, S_z]$ und zeigen Sie, dass demzufolge die Basis von J^2, J_z, L^2, S^2 den Operator $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ diagonalisiert.