Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2015ik4

Universität Konstanz

**Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)**
**Sommersemester 2015 - Übungsblatt 11**
Ausgabe: 1.7., Abgabe: 8.7., Übungen: 10.7.

## Aufgabe 27: Der Harmonische Oszillator I (schriftlich - 8 Punkte)

Mit der für den harmonischen Oszillator aus der Vorlesung bekannten orthonormierten Basis der Eigenzustände $|n\rangle$, mit $n = 0, 1, 2, ...$, des Hamiltonoperators $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, sollen die folgenden Größen berechnet werden:

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Matrizen $\langle n'|\hat{x}|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}|n\rangle$ mit den Orts- und Impuls-Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie $\langle n'|\hat{x}^2|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}^2|n\rangle$ und zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung von $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ diagonal ist.

c) (3 Punkte) Lösen Sie mit Teilaufgabe b) folgenden Widerspruch:

1. Zeigen Sie für 2 beliebige endlich dimensionale Matrizen A und B, dass Spur$([A, B]) = 0$ gilt, wobei Spur$(A) = \sum_i A_{ii}$.
2. Aus der Spurbildung angewendet auf den Orts-Impuls-Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ in Matrixdarstellung müsste nach Punkt (1) also in naiver Betrachtung $\hbar = 0$ folgen. Berechnen Sie $\hat{x}\hat{p}$ und $\hat{p}\hat{x}$ mit den unendlich-dimensionalen Matrizen aus a) um zu erklären, weswegen die Folgerung $\hbar = 0$ nicht gilt.

## Aufgabe 28: Der Harmonische Oszillator II

Betrachten Sie die sogenannten *kohärenten Zustände*

$$|\alpha\rangle := |\psi_\alpha\rangle = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = Ce^{\alpha a^\dagger}|0\rangle,$$

die mit einer komplexen Konstante $\alpha = |\alpha|e^{i\delta}$ gebildet werden können.
Kohärente Zustände beschreiben das Analogon zu einem klassischen Teilchen im harmonischen Oszillator und haben vielseitige Anwendungen in der Laserphysik und Quantenoptik.

a) Zeigen Sie, dass $|\alpha\rangle$ Eigenfunktion zum Absteigeoperator $a$ ist. Vermuten Sie, dass $a^\dagger$ Eigenfunktionen besitzt?

b) Welches $C > 0$ normiert $|\alpha\rangle$ auf 1?

Mit diesem $C$ kann $|\alpha\rangle$ geschrieben werden als $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt $p_n = |c_n|^2$? Drücken Sie diese durch die mittlere Teilchenzahl $\langle\hat{n}\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle$ aus. Berechnen Sie auch die Varianz $(\Delta n)^2$ der Teilchenzahl.

c) Wie lautet der zeitabhängige Zustand $|\alpha(t)\rangle$, wenn $|\alpha(t = 0)\rangle = |\alpha\rangle$?
*Hinweis:* Argumentieren Sie mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung und bringen Sie $|\alpha(t)\rangle$ auf die Form $|\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega t/2}|\psi_{\alpha(t)}\rangle$.

d) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert für den Ort

$$\langle x\rangle(t) = \langle\alpha(t)|x|\alpha(t)\rangle.$$

*Hinweis:* Bringen Sie das Ergebnis auf die Form $\langle x\rangle(t) = 2\lambda|\alpha|\cos(\omega t - \delta)$.

e) Berechnen Sie die Unschärfe $(\Delta x)^2(t) = \langle\alpha(t)|(x - \langle x\rangle(t))^2|\alpha(t)\rangle$ und (das analog definierte) $(\Delta p)^2(t)$ z.B. durch Ausnutzung von $\langle p\rangle = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle$ (Ehrenfest-Theorem).

Zeigen Sie damit, dass $|\alpha\rangle$ ein sogenanntes Minimalpaket ist, welches zeitlich nicht auseinander läuft, d.h.

$$\Delta x(t)\Delta p(t) = \frac{\hbar}{2}.$$

## Aufgabe 29: Ritzsches Variationsverfahren

Ein Hamiltonoperator $H$ habe den nichtentarteten Grundzustand $\psi_0$ zur Energie $E_0$ und angeregte Zustände $\psi_i$ zur Energie $E_i > E_0$. $E_1$ sei die Energie des ersten angeregten Zustandes,etc.

a) Zeigen Sie, dass folgendes Variationsprinzip gilt:

(i)

$$E_0 = \min_{\psi\in\mathcal{H}}\{\langle\psi|H|\psi\rangle \mid \langle\psi|\psi\rangle = 1\}$$

(ii)

$$E_1 = \min_{\psi\in\mathcal{H}}\{\langle\psi|H|\psi\rangle \mid \langle\psi|\psi\rangle = 1, \langle\psi_0|\psi\rangle = 0\}$$

Das Rayleigh-Ritz'sche Näherungsverfahren beruht darauf, eine Form für den Grundzustand als Funktion von Parametern $a_1, a_2, \ldots, a_N$, also $\psi(x) = \psi(x, a_1, \ldots, a_N)$, anzusetzen und durch Minimierung von $E(a_1, \ldots, a_N) = \langle\psi|H|\psi\rangle/\langle\psi|\psi\rangle$ eine optimale Funktion $\psi$ und eine Abschätzung für $E_0$ zu bestimmen.

b) Betrachten Sie das Dreieckspotential in einer Dimension:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ Fx & x > 0 \end{cases}$$

Mit dem Variationsansatz $\psi(x) = xe^{-ax}$ bestimmen Sie das optimale $a$ und die Näherung für $E_0$.

*Hinweis:* $\int_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x = n! \quad (n \in \mathbb{N})$.

c) Betrachten Sie das anharmonische Potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \lambda x^3$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Variationsansatzes $\psi(x) = e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} = e^{-(\xi-\alpha)^2/2}$ (verschobene Gaussfunktion) den optimalen Parameter $a$ bzw. $\alpha$.

*Hinweis*: Verwenden Sie natürliche Einheiten, d.h. $\xi = x/\sigma$, etc. mit $\sigma^2 = \hbar/(m\omega)$.

Erklären Sie das Versagen der Methode für bestimme Werte von $\lambda$.