Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2015ik4

Universität Konstanz

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2015 - Übungsblatt 9
Ausgabe: 17.6., Abgabe: 24.6., Übungen: 26.6.

Aufgabe 21: Der Vektorraum L^2

a) Zeigen Sie, dass die quadratintegrierbaren Funktionen ($\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathrm{d}\mathbf{r} < \infty$) einen Vektorraum (genannt $L^2(\mathbb{R}^3)$) bilden.

b) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt, definiert durch

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int \psi^*(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\ \mathrm{d}\mathbf{r},$$

für alle Elemente von $L^2(\mathbb{R}^3)$ existiert.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie $|\phi(\mathbf{r})|^2 + |\psi(\mathbf{r})|^2 \geq 2|\phi(\mathbf{r})||\psi(\mathbf{r})|$.

Aufgabe 22: Gram-Schmidt-Orthonormierung

Betrachten Sie den Hilbert-Raum $L^2([-1,1],\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$.

a) Konstruieren Sie durch Anwendung des *Gram-Schmidt-Verfahrens* ausgehend von der Basis der Monome $(1, x, x^2, x^3, ...)$ die ersten drei Polynome eines Orthogonalsystems.

b) Gesucht ist ein Orthogonalsystem von Polynomen $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ mit der Normierung

$$\langle P_n|P_m\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

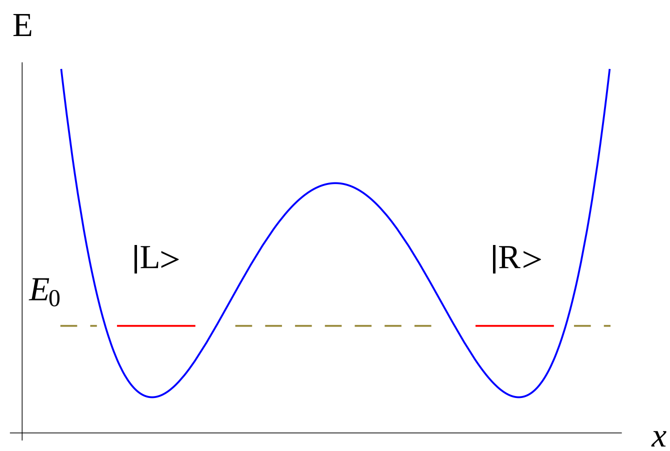
Normieren Sie die Polynome aus a) um die $P_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2$) zu erhalten. Die so bestimmten Polynome werden *Legendre-Polynome* genannt.

c) Bestimmen Sie zum Vergleich ausgehend von allgemeinen Polynomen der n-ten Ordnung, d.h. $f_0(x) = a_0$, $f_1(x) = a_1x+b_1$, $f_2(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$, die Polynome $P_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2$) allein durch Ausnutzung der Orthonormalitätsbedingungen.

<u>Aufgabe 23:</u> Zwei-Niveausystem **(schriftlich - 6 Punkte)**

a) (1 Punkt) Betrachten Sie zunächst ein Doppelmulden-Potential, bei dem die Barriere in der Mitte so hoch ist, dass kein Teilchen diese durchdringen kann. In jedem der beiden Mulden soll es nur einen Zustand der Energie E_0 geben ($|L\rangle$ and $|R\rangle$).

Welcher Hamiltonoperator beschreibt das System?



b) (1 Punkt) Für eine kleinere Barriere ist Tunneln möglich, d.h.

$$H|L\rangle = E_0|L\rangle + t|R\rangle\,,$$

$$H|R\rangle = E_0|R\rangle + t|L\rangle\,.$$

Stellen Sie die Matrixdarstellung des Hamiltonoperators H in der Orthonormalbasis $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ auf.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenzustände von H?

d) (1 Punkt) Nehmen Sie an, ein Teilchen sei im Zustand $|L\rangle$ oder $|R\rangle$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man das Teilchen in einem der beiden Eigenzustände messen?

f) (1 Punkt) Nehmen Sie an, ein Teilchen sei in einem der Eigenzustände von H. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man das Teilchen in den Zuständen $|L\rangle$ und $|R\rangle$ messen?