Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2015ik4

Universität Konstanz

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2015 - Übungsblatt 8
Ausgabe: 10.6., Abgabe: 17.6., Übungen: 19.6.

Aufgabe 19: Lösung der Radialgleichung (schriftlich - 6 Punkte)

Die Radialgleichung für ein Elektron (Masse m) im Coulomb-Potential eines Z-fach geladenen Atomkerns ($Z = 1$ für Wasserstoff) lautet

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2Z}{a_{\mathrm{B}} r} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) u(r) = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung soll mit Hilfe der Polynommethode (vgl. Harmonischer Oszillator) gefunden werden.

a) (2 Punkte) Führen Sie die dimensionslosen Größen $\eta = \frac{1}{Z}\sqrt{-\frac{E}{E_R}}$ (mit der Rydberg-Energie $E_R = \frac{\hbar^2}{2ma_{\mathrm{B}}^2}$) und $\rho = \frac{Zr}{a_{\mathrm{B}}}$ ein und vereinfachen Sie die Differentialgleichung. Zeigen Sie, dass mit dem Ansatz $u(\rho) = P(\rho)\rho^{l+1}e^{-\eta\rho}$ (Verhalten für $\rho \to 0$ und $\rho \to \infty$) folgt:

$$P''(\rho) + 2\left(\frac{l+1}{\rho} - \eta\right) P'(\rho) + \frac{2}{\rho}\left(1 - \eta(l+1)\right) P(\rho) = 0.$$

b) (2 Punkte) Machen Sie einen Potenzreihenansatz $P(\rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \rho^\nu$ um eine Rekursionsformel für die a_ν zu bekommen und diskutieren Sie, warum die Potenzreihe abbrechen muss und was daraus folgt.

c) (2 Punkte) Die Rekursionsformel

$$a_{\nu+1} = 2\frac{\eta(l+\nu+1) - 1}{(\nu+1)(\nu+2(l+1))} a_\nu$$

wird durch

$$a_\nu = \left(\frac{2}{n}\right)^\nu \binom{n+l}{n-l-1-\nu} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$$

gelöst. Hierbei ist $n = 1/\eta$ die Hauptquantenzahl.

Damit ergibt sich

$$P(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right) = \sum_{\nu=0}^{n-l-1} \binom{n+l}{n-l-1-\nu} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left(\frac{2\rho}{n}\right)^\nu$$

zu den sog. *zugeordneten Laguerre-Polynomen.*

Schreiben Sie damit die Energie-Eigenwerte und (unnormierten) Gesamt-Wellenfunktionen des Elektrons für dieses Problem (in SI Einheiten).

Aufgabe 20: Runge-Lenz-Operator und l-Entartung **(mündlich)**

Im Wasserstoffatom mit dem Hamiltonoperator $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\gamma}{r}$ existiert aufgrund des $1/r$-Potentials eine zusätzliche Erhaltungsgröße, der Runge-Lenz-Vektor (siehe Keplerproblem in der Mechanik). In der Quantenmechanik wird ein analoger Runge-Lenz-Operator eingeführt, der aufgrund der Nichtvertauschbarkeit von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{L}$ symmetrisch definiert wird zu

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{L} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{L}\right) + \frac{\gamma}{r}\mathbf{r}.$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{L} \times \mathbf{p})^\dagger = -\mathbf{p} \times \mathbf{L} = \mathbf{L} \times \mathbf{p} - 2i\hbar\mathbf{p}$ und damit, dass der Runge-Lenz-Vektor hermitesch ist.

b) (1 Punkt) Man kann zeigen, dass $\mathbf{A}$, wie in der klassischen Mechanik, eine Erhaltungsgröße ist, also sowohl mit dem Hamiltonoperator H als auch mit dem Drehimpuls vertauscht. Die bekannten Lösungen des Wasserstoffatoms sind also auch Eigenfunktionen von $\mathbf{A}$.

Nun definiert man einen speziellen Operator

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} + \sqrt{-\frac{m}{2H}}\mathbf{A}\right),$$

der für die gebundenen Zustände ($E_n < 0$) wohl definiert ist. Zeigen Sie, dass $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$.

Hinweis: Sie können verwenden, dass $[L_i, K_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}K_k$ und $[K_i, K_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$ mit $\mathbf{K} = \sqrt{-\frac{m}{2H}}\mathbf{A}$.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie ausgehend von $A^2 = 2H(L^2 + \hbar^2)/m + \gamma^2$, dass

$$H = -\frac{m\gamma^2}{2(4J^2 + \hbar^2)}.$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = 0$.

d) (2 Punkte) Offensichtlich ist $\mathbf{J}$ ein Drehimpulsoperator. Verwenden Sie ihr Wissen über Drehimpulsoperatoren (insbesondere J^2), um die Energieeigenwerte des Wasserstoffatoms zu erhalten:

$$E_n = \frac{m\gamma^2}{\hbar^2}\left(-\frac{1}{2n^2}\right).$$

Die zusätzliche Erhaltungsgröße des $1/r$-Potentials äußert sich hier also in der sog. l-Entartung des Wasserstoffatoms.