Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2015ik4

Universität Konstanz

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2015 - Übungsblatt 7
Ausgabe: 3.6., Abgabe: 10.6., Übungen: 12.6.

Aufgabe 16: Drehimpulsalgebra (schriftlich - 5 Punkte)

a) (3 Punkte) Berechnen Sie folgende Kommutatorrelationen für den Drehimpuls

$$\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)^T = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

bzw. $L_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j p_k$ mit den bekannten Kommutatorrelationen der Orts- und Impulskomponenten:

$$[L_i, x_j],\ [L_i, p_j],\ [L_i, L_j],$$

$$[L^2, L_i],\ [L_i, r^2],\ [L_i, p^2].$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie außerdem mit den Leiteroperatoren $L_\pm = L_x \pm iL_y$, dass:

$$\begin{aligned}
[L_z, L_\pm] &= \pm\hbar L_\pm,\\
[L^2, L_\pm] &= 0,\\
[L_+, L_-] &= 2\hbar L_z,\\
L_+L_- &= L^2 - L_z^2 + \hbar L_z.
\end{aligned}$$

Aufgabe 17: Kugelflächenfunktionen (mündlich)

a) Zeigen Sie die folgende Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen

$$Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y^*_{l,m}(\vartheta, \varphi).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi')\delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta')$$

und der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\vartheta Y^*_{l',m'}(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'},$$

dass sich jede Funktion f nach Kugelflächenfunktionen entwickeln lässt, d.h.

$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} R_{l,m}(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi).$$

c) Zeigen Sie explizit, dass die folgenden Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen von L^2 und L_z alle zueinander orthonormal sind:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta, Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\varphi} \sin\vartheta.$$

d) Verwenden Sie zum Lösen der folgenden Aufgaben das Computer-Algebra-System MATHEMATICA™z.B. im PC-Pool der Physik.

i) Zeigen Sie die Normierung der in a) angegebenen Kugelflächenfunktionen, indem Sie die entsprechenden Integrale berechnen lassen.

ii) Stellen sie das Betragsquadrat der Kugelflächenfunktionen für $l = 0, 1, 2$ und alle möglichen m graphisch dar.

Hinweis: Verwenden Sie die Funktion SphericalPlot3D. In MATHEMATICA sind die Kugelflächenfunktionen verfügbar als SphericalHarmonicY[l, m, θ, ϕ].

iii) Stellen Sie auch das Betragsquadrat der folgenden Kombinationen von Kugelflächenfunktionen dar und vergleichen Sie mit ii)

$$Y_{11} + Y_{1-1}, Y_{11} - Y_{1-1},$$

$$Y_{21} + Y_{2-1}, Y_{21} - Y_{2-1}, Y_{22} + Y_{2-2}, Y_{22} - Y_{2-2}.$$

Aufgabe 18: Das Wasserstoffatom **(mündlich)**

Die Schrödingergleichung für ein Elektron im Coulombpotential beschreibt das nichtrelativistische Wasserstoffatom und lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}).$$

a) Berechnen Sie den Laplace-Operator $\Delta = \nabla^2$ in Kugelkoordinaten und zeigen Sie, dass er sich mit dem Drehimpulsoperator L schreiben lässt als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2/\hbar^2}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{L^2/\hbar^2}{r^2}.$$

b) Mit einem Produktansatz $\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ und der bekannten Eigenwertgleichung $L^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ leiten Sie eine Differentialgleichung für den radialen Anteil $R(r)$ her.

c) Führen Sie die Substitution $R(r) = u(r)/r$ durch, um auf die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{a_\mathrm{B} r}\right)u(r) = -\frac{2m}{\hbar^2}E_{n,l}u(r)$$

zu kommen, wobei $a_\mathrm{B} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$ der Bohrsche Radius ist.
Die Lösung dieser Differentialgleichung wird mit Hilfe der Polynommethode (analog zum Harmonischer Oszillator) in Aufgabe 19 (Blatt 9) gefunden und führt auf die *Laguerre-Polynome*.