Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2015ik4

Universität Konstanz

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2015 - Übungsblatt 6
Ausgabe: 27.5., Abgabe: 3.6., Übungen: 5.6.

Aufgabe 14: Elektronen im periodischen Potential (schriftlich - 10 Punkte)

In der Festkörperphysik werden Lösungen der Schrödingergleichung in einem periodischen Potential untersucht. Nehmen Sie ein räumlich periodisches Potential $V(x) = V(x+a)$ in einer Dimension an.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator für ein Teilchen im periodischen Potential mit dem Translationsoperator T (siehe Aufgabe 11c)) vertauscht.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass Eigenzustände eines Hamiltonoperators im periodischen Potential $V(x) = V(x+a)$ die Form

$$\psi(x) = u_k(x)e^{ikx}$$

haben, wobei $u_k(x+a) = u_k(x)$, d.h. periodisch ist (*Bloch-Theorem*).

Hinweis: Verwenden Sie $u_k(x) := e^{-ikx}\psi(x)$.

c) (2 Punkte) Leiten Sie aus dem Blochtheorem und der eindimensionalen Schrödingergleichung die folgende Gleichung zur Bestimmung der Fourierkomponenten der gitterperiodischen Funktion $u_k(x)$ her

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}(q+k)^2 - E_k\right)u_k(q) + \sum_{q'} V(q-q')u_k(q') = 0.$$

d) (2 Punkte) Wie lauten die Lösungen E_{nk} für freie Elektronen ($V = 0$)? Skizzieren Sie das reduzierte Zonenschema.

e) (2 Punkte) Für fast freie Elektronen gilt $u_k(x) \approx \mathit{const.}$ und die Energien entsprechen ungefähr dem Fall $V = 0$. Zeige für $E_k(n = 0)$

$$u_k(q) \approx \frac{V(q)}{\frac{\hbar^2}{2m}\left(k^2 - (k+q)^2\right)}u_k(0).$$

Bei welchen Werten von q wird der Betrag von $u_k(q)$ also relevant? Stellen Sie damit das Gleichungssystem für $n = 0$ und $n = 1$ auf.

f) (2 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem aus d) und bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte an der kritischen Stelle für ein Potential $V(x) \sim \sin(k_0x)$. Skizzieren Sie den Einfluß des schwachen Potentials auf die Bandstruktur.

Aufgabe 15: Resonanzen am Potentialtopf **(mündlich)**

In der Vorlesung wurden gebundene Zustände im endlichen Potentialtopf behandelt. Betrachten Sie nun den endlichen Potentialtopf der Breite a für Zustände mit positiver Energie $E > 0$.

a) Stellen Sie für die drei Bereiche (I: $x < -a/2$, II: $|x| < a/2$, III: $x > a/2$) einen Ansatz auf. Die von $-\infty$ einlaufende Welle soll Amplitude 1 haben und die reflektierte Welle Amplitude R. Die transmittierte Welle im Gebiet III habe die Amplitude S. Wie hängt die Wellenzahl q in den Gebieten I und III und k im Gebiet II mit der Energie zusammen?

b) Stellen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen ein Gleichungssystem für die 4 unbekannten Amplituden auf. Lösen Sie das Gleichungssystem z.B. durch Einsetzen und zeigen Sie, dass die transmittierte Amplitude gegeben ist durch

$$S = \frac{e^{-iqa}}{\cos(ka) - i\frac{k^2+q^2}{2kq}\sin(ka)}.$$

c) Bestimmen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit $|S(E)|^2$ als Funktion der Energie und skizzieren Sie die Funktion. Berechnen Sie für welche Energien $|S(E_n)|^2 = 1$ gilt. Was bedeutet das?

d) Durch analytische Fortsetzung von S für negative Energien hat S Polstellen. Verwenden Sie $q = i\kappa$ und zeigen Sie, dass die Position der Polstellen von S genau den gebundenen Zuständen entspricht.

Hinweis: Formen Sie die Bestimmungsgleichung der Polstellen so um, dass sich die Bestimmungsgleichungen der gebundenen Zustände ergeben.