



**Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)**  
**Sommersemester 2015 - Übungsblatt 3**  
Ausgabe: 6.5., Abgabe: 13.5., Übungen: 15.5.

**Aufgabe 6: Das Gauß'sche Wellenpaket**

(schriftlich - 12 Punkte)

Gegeben sei eine Gaußverteilung der Wellenzahlen  $k$  in einer Dimension:

$$a(k) = C e^{-ikx_0} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\sigma^2}} \quad (\sigma > 0).$$

- a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Normierungskonstante  $C \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 dk = 1.$$

- b) (2 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige Wellenpaket im Ortsraum durch Fourier-Rücktransformation

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

und der Dispersionsrelation  $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$ .

*Hinweis:* Es ergibt sich

$$\psi(x, t) = \frac{C}{\sqrt{4\pi b(t)}} e^{ik_0 c(t)} e^{-\frac{(x-r(t))^2}{4b(t)}}$$

mit  $b(t) = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{i\hbar}{2m}t$ ,  $r(t) = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m}t$  und  $c(t) = x - x_0 - \frac{\hbar k_0}{2m}t$ .

- c) (2 Punkte) Berechnen Sie  $|\psi(x, t)|^2$  und zeigen Sie, dass das Maximum des Wellenpaketes am Ort  $x_0 + v_g t$  liegt.  $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$  ist hierbei die Gruppengeschwindigkeit. Betrachten Sie auch die Breite des Wellenpaketes  $|\psi(x, t)|^2$  und beschreiben Sie das *Zerfließen des Wellenpaketes*.
- d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx$  unabhängig von der Zeit ist. Was bedeutet das?
- e) (2 Punkte) Berechnen Sie den *Erwartungswert*

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t)^* x \psi(x, t) dx$$

des Ortes  $x$  im Zustand  $\psi(x, t)$  sowie  $\langle x^2 \rangle$ .

f) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für die Varianz (Unschärfe) einer beliebigen Funktion  $A(x)$  gilt:

$$(\Delta A)^2 := \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

g) (2 Punkte) Berechnen Sie damit die Ortsunschärfe  $\Delta x$  und die Impulsunschärfe  $\Delta p$  wobei für den Impuls gilt  $p = -i\hbar\partial_x$ .

h) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die *Heisenbergsche Unschärferelation*  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$  erfüllt ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

### Aufgabe 7: Diffusion und Gauß'sches Wellenpaket

(mündlich)

Die (eindimensionale) Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$\partial_t \phi(x, t) = D \partial_x^2 \phi(x, t)$$

beschreibt die Ausbreitung einer beliebigen Funktion  $\phi(x, t)$  (z.B. Temperatur) mit der Zeit aufgrund von Zufallsprozessen wie z.B. Streueignissen.

a) Lösen Sie die Diffusionsgleichung für eine (normierte) Gaussverteilung mit einer zeitabhängigen Breite

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(t)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2s(t)}} \quad (s(t) > 0)$$

und finden Sie  $s(t)$ .

*Hinweis:* Für die zeitabhängiger Breite ergibt sich der Ausdruck

$$s(t) = \frac{D}{s'(t)}.$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung mit einem geeigneten Ansatz.

b) Diskutieren und vergleichen Sie das Ergebnis mit der zeitabhängigen Breite der Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$  des Gauß'schen Wellenpaketes aus Aufgabe 6.