



Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 9

Ausgabe: 15.12.2014, Abgabe: 12.01.2014, Übungen: 15.01.2014 und 16.01.2014

Aufgabe 25: Austauschenergie (schriftlich)

Gegeben sei ein fermionischer Zustand $|n_1, \dots, n_r, \dots\rangle$. Zeigen Sie, dass die Matrixelemente des Zweiteilchenwechselwirkungs-Operators in zweiter Quantisierung V als

$$\langle n_1, \dots, n_r, \dots | V | n_1, \dots, n_r, \dots \rangle = \frac{1}{2} \sum_{r_1, r_2} \left(\langle r_1, r_2 | v | r_1, r_2 \rangle - \langle r_1, r_2 | v | r_2, r_1 \rangle \right) n_{r_1} n_{r_2}$$

geschrieben werden können. Das Matrixelement $\langle r_1, r_2 | v | r_2, r_1 \rangle$ heißt Austauschenergie.

Aufgabe 26: Zwei-Teilchen-Potential in der Wellenvektor-Basis

Sei $v(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ ein Zwei-Teilchen-Wechselwirkungspotential, welches invariant unter Verschiebung ist. Die Fourier-Transformation ist im Volumen $\Lambda = L^3$ durch

$$\tilde{v}_\Lambda(\mathbf{k}) = \int_\Lambda d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} v(\mathbf{x})$$

definiert. Man definiert auch die dazugehörige periodische Fourier-Reihe

$$v_\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{v}_\Lambda(\mathbf{k}),$$

mit $\mathbf{k} = (2\pi n_1/L, 2\pi n_2/L, 2\pi n_3/L)$ und $n_i \in \mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass in zweiter Quantisierung die Wechselwirkung die folgende Form hat:

$$V = \frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}} \tilde{v}_\Lambda(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1}. \quad (1)$$

b) Berechnen Sie $\tilde{v}_\Lambda(\mathbf{k})$ für die Coulomb-Wechselwirkung, wobei Sie den Grenzfall $L \rightarrow \infty$ betrachten.

Hinweis: verwenden Sie zuerst $v(\mathbf{x}) = e^2 e^{-\alpha|\mathbf{x}|} / (4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}|)$ und führen dann den Grenzübergang $\alpha \rightarrow 0$ durch.

c*) (Jellium-Modell) Betrachten Sie in erster Quantisierung die Hamilton-Funktion eines System, dass aus N Elektronen (N ist groß) im Volumen $\Lambda = L^3$ und dem positiv geladenen Hintergrund mit der Dichte $\rho = N/\Lambda$ besteht. Überzeugen Sie sich davon, dass dann in zweiter Quantisierung der Term mit $\mathbf{k} = 0$ in Gl. (1) verschwindet.

Aufgabe 27: Paarkorrelationen für Bosonen

Nehmen wir an, dass wir N freie Bosonen im Volumen V haben. Die Paarverteilungsfunktion $G^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ wird als

$$G^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv \left(\frac{N}{V}\right)^2 g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \Phi | \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) | \Phi \rangle,$$

definiert, wobei $|\Phi\rangle$ den Vielteilchenzustand bezeichnet, in dem sich die Bosonen befinden.

a) Wie lautet $G^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ im Zustand, bei dem es $N/2$ Bosonen mit Wellenvektor \mathbf{k}_1 und $N/2$ Bosonen mit Wellenvektor \mathbf{k}_2 gibt, wobei $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$ gilt? Beobachten Sie für diesen Zustand Bunching oder Antibunching, wenn N groß ist?

b) Berechnen Sie $G^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ für den kohärenten Zustand

$$|\alpha\rangle_{\mathbf{k}} = e^{\alpha a_{\mathbf{k}}^\dagger - \alpha^* a_{\mathbf{k}}} |0\rangle,$$

wobei Sie $\langle N \rangle = \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle$ anstatt N in der Definition von $G^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ verwenden. Wie sieht es bei diesem Zustand mit Bunching oder Antibunching aus? Geben Sie eine einfache physikalische Interpretation Ihrer Antwort.

FRÖHLICHE WEIHNACHTEN UND EINEN GUTEN RUTSCH INS NEUE JAHR!

