UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
http://tinyurl.com/2014qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 8
Ausgabe: 8.12.2014, Abgabe: 15.12.2014, Übungen: 18.12.2014 und 19.12.2014

Aufgabe 22: Basiswechsel in zweiter Quantisierung

Die Einteilchen-Basiszustände $|\psi_\mu\rangle$ gehen durch eine lineare unitäre Transformation in die neuen Basiszustände $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ (jeweils Orthonormalbasen) über

$$|\tilde{\psi}_\nu\rangle = \sum_\mu |\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|\tilde{\psi}_\nu\rangle.$$

Die Transformationsregeln für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_\mu^\dagger$ und $\hat{a}_\mu$ der Einteilchen-Zustände $|\psi_\mu\rangle$ sind analog:

$$\hat{b}_\nu^\dagger = \sum_\mu \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle^* \hat{a}_\mu^\dagger, \quad \hat{b}_\nu = \sum_\mu \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle \hat{a}_\mu.$$

a) Zeigen Sie, dass $\hat{b}_\nu^\dagger$ und $\hat{b}_\nu$ die gleichen (Anti-)Kommutatorrelationen für Fermionen/Bosonen erfüllen, wie $\hat{a}_\mu^\dagger$ und $\hat{a}_\mu$.

b) Beweisen Sie, dass die Zahl der Teilchen (wie alle messbaren Größen) invariant unter einer Basistransformation ist, also, dass gilt

$$\sum_\nu \hat{b}_\nu^\dagger \hat{b}_\nu = \sum_\mu \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu.$$

c) Wichtiger Spezialfall: *Feldoperatoren*
Die sogenannten Feldoperatoren $\hat{\psi}^\dagger(x)$ und $\hat{\psi}(x)$, die ein Teilchen am (eindimensionalen) Ort erzeugen bzw. vernichten, sind gegeben durch die Basistransformation

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle^* \hat{a}_\mu^\dagger = \sum_\mu \phi_\mu^*(x)\hat{a}_\mu^\dagger, \quad \hat{\psi}(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle \hat{a}_\mu = \sum_\mu \phi_\mu(x)\hat{a}_\mu.$$

Die Koeffizienten $\phi_\mu(x)$ sind die bekannten Wellenfunktionen des entsprechenden Zustandes $|\psi_\mu\rangle$ in der Ortsdarstellung.
Zeigen Sie, dass die Vertauschungsrelationen fermionischer Feldoperatoren gegeben sind durch

$$\left\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\right\} = \left\{\hat{\psi}^\dagger(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\right\} = 0, \quad \left\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\right\} = \delta(x - x')$$

und analog für bosonische Feldoperatoren.

Aufgabe 23: Feldoperatoren und Hamilton-Operator (schriftlich)

1) Zeigen Sie, dass die kinetische Egergie durch die Feldoperatoren als

$$T = \int d^3r \; \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\psi}(\mathbf{r})$$

dargestellt werden kann.
Hinweis: Beginnen Sie mit der Darstellung $T = \sum_{ij} t_{ij} a_i^\dagger a_j$, wobei $t_{ij} = \left\langle i \middle| -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \middle| j \right\rangle$. Schreiben Sie t_{ij} mit Hilfe der Einteilchenwellenfunktionen in der Ortsdarstellung auf. Drücken Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren durch die Feldoperatoren und die Einteilchenwellenfunktionen aus. Passen Sie bei Integration und Summation auf die Reihenfolge von Operatoren und Funktionen auf.

2) Wann darf T in die Form

$$T = \int d^3r \; \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r})$$

gebracht werden?

3) Leiten Sie aus der folgenden *Heisenbergschen Bewegungsgleichung* für die *zeitabhängigen Feldoperatoren* $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ und $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), H \right] \; ,$$

wobei

$$H = \int d^3r \; \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \; \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) \; ,$$

$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ und $\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t = 0)$, die *Feldgleichung* her:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \int d^3r' \; \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \; .$$

Aufgabe 24: Ideales Fermigas

Wir betrachten ein System von vielen schwach gebundenen Elektronen in einem endlichen zweidimensionalen Kasten der Fläche S. In der Sommerfeld-Theorie idealisiert man das System und nimmt freie, nicht wechselwirkende Elektronen mit dem folgenden Hamilton-Operator:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma} \; .$$

a) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\varphi_0\rangle = \prod_{\mathbf{k}, \, k \le k_F} \; \prod_{\sigma = \uparrow, \downarrow} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}, \sigma} |0\rangle$$

der Grundzustand von $\mathcal{H}_0$ ist.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wellenvektor des Grundzustandes k_F als Funktion der Teilchendichte $n_{2D} = N/S$, wobei N die Anzahl von Elektronen ist.

c) Berechnen Sie nun noch die Grundzustandenergie E_0 als Funktion von N und der Fermienergie $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$.