UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
http://tinyurl.com/2014qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 7
Ausgabe: 1.12.2014, Abgabe: 8.12.2014, Übungen: 11.12.2014 und 12.12.2014

Aufgabe 19: Fermionische Teilchendarstellung von Operatoren

Sei O ein Einteilchenoperator. Wir definieren den entsprechenden Einteilchenoperator, der auf dem Vielteilchen-Hilbertraum wirkt, als $\mathcal{O} = F(O) = \sum_{s,r} O_{rs} a_r^\dagger a_s$ mit $O_{rs} = \langle r|O|s\rangle$. Wir möchten zeigen, dass die Teilchendarstellung der Spinoperatoren

$$\mathcal{S}_k = \frac{\hbar}{2} F(\sigma^k) = \frac{\hbar}{2} \sum_{s,r} \sigma^k_{rs} a_r^\dagger a_s$$

die Drehimpulsalgebra erfüllt. Hier sind σ^k die Pauli-Matrizen und $k \in \{x, y, z\}$; $a_r^\dagger$ und a_s erfüllen die fermionischen Vertauschungsrelationen.

a) Als Vorbereitung leiten Sie zuerst die folgende Relation her:

$$[X, YZ] = \{X, Y\}Z - Y\{X, Z\} = \{Y, X\}Z - Y\{Z, X\}.$$

b) Benutzen Sie $[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z]$ und dann das Ergebnis von (a), um die folgende Gleichung herzuleiten:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = [F(A), F(B)] = F([A, B]).$$

c) Zeigen Sie dann mit Hilfe von (b), dass

$$[\mathcal{S}_k, \mathcal{S}_l] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{klm}\mathcal{S}_m.$$

Aufgabe 20: Kohärente Zustände von Fermionen

Betrachten Sie ein fermionisches System mit einem Freiheitsgrad. Um hier einen kohärenten Zustand zu konstruieren, benötigen wir die sogenannten *Grassmann-Variablen.* Dies sind Zahlen, die mit sich selbst und allen fermionischen Operatoren antikommutieren, d.h.

$$\{\xi, \xi\} = \{\xi, c\} = \{\xi, c^\dagger\} = 0.$$

a) Überprüfen Sie, dass der Zustand $|\eta\rangle = e^{-\eta c^\dagger}|0\rangle$ **kein Eigenzustand** des Vernichtungsopertors c ist, falls η eine komplexe Zahl ist.
b) Überlegen Sie sich, warum jede analytische Funktion von Grassmann-Variablen linear ist, d.h. $f(\xi) = f_0 + f_1\xi$.
c) Zeigen Sie damit, dass, wenn ξ eine Grassmann-Variable ist, $|\xi\rangle = e^{-\xi c^\dagger}|0\rangle$ ein kohärenter Zustand ist, d.h. $c|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$.

Aufgabe 21: Heisenberg-Ferromagnet (schriftlich)

Wir betrachten ein n-Spin-System (Spin S) mit dem Hamilton-Operator

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j, \quad J > 0,$$

wobei $\langle i,j \rangle$ bedeutet, dass nur über nächste Nachbarn summiert wird. Jeder Spin hat p nächste Nachbarn.

1) Welcher Zustand ist der Grundzustand $|G\rangle$ von H?

a) Zeigen Sie, dass $|G_0\rangle = |S, S, \ldots, S\rangle$ ein Eigenzustand ist. Berechnen Sie die Energie dieses Zustands.

b) Zeigen Sie, dass $|S, S, \ldots, S\rangle$ die kleinstmögliche Energie hat.
(Hinweis: Es genügt, $\langle \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \rangle \leq S^2$ zu zeigen. Warum?)

c) Zeigen Sie, dass H mit $S^-_{\text{tot}} = \sum_i S^-_i$ kommutiert.
Was bedeutet das für die Zustände $(S^-_{\text{tot}})^l |S, S, \ldots, S\rangle$ mit $l = 1, 2, \ldots, 2Sn$?

d) Wie sieht der Grundzustand aus? (Beschreiben Sie in Worten).

2) Wir suchen jetzt die niedrigsten Anregungen und betrachten den Zustand $|i\rangle = |S \ldots \underbrace{S-1}_{i} \ldots S\rangle$.

a) Wie kann man $|i\rangle$ von $|G_0\rangle$ erhalten?
(Hinweis: Wie wirkt S^-_i auf $|G_0\rangle$?)

b) Berechnen Sie $H^z|i\rangle$, wobei $H^z = -J \sum_{\langle k,l \rangle} S^z_k S^z_l$. Ist $|i\rangle$ ein Eigenzustand von H^z?

c) Berechnen Sie $H^\perp|i\rangle$. Hier $H^\perp = -J \sum_{\langle k,l \rangle} (S^x_k S^x_l + S^y_k S^y_l)$. Ist $|i\rangle$ ein Eigenzustand von $H^\perp$?

d) Betrachten Sie die *Bloch-Zustände* $|\boldsymbol{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} |i\rangle$, die solche lineare Superpositionen von $|i\rangle := |\boldsymbol{r}_i\rangle$ darstellen, die der Translationssymmetrie genügen. Benutzen Sie diese Zustände, um $H^\perp$ zu diagonalisieren.
(Hinweis: Die Summe über die nächsten Nachbarn vom i. Spin $\sum_{j(i)} |\boldsymbol{r}_j\rangle$ lässt sich als $\sum_{\boldsymbol{\tau}} |\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\tau}\rangle$ schreiben, wobei der Satz von Translationsvektoren $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$ für jedes i gleich ist).

e) Welche Energie hat dann der Zustand $|\boldsymbol{k}\rangle$?

3*) Wir suchen jetzt weitere Anregungen des Systems. Leider ist der Zustand $|\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'\rangle = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_j)} S^-_i S^-_j |G_0\rangle$ kein Eigenzustand von H. Wir brauchen eine andere Methode, um die Anregungsenergien zu bestimmen.

a) Schreiben Sie H mit Hilfe der Holstein-Primakoff-Transformation um (vgl. Aufgabe 17).
(Hinweis: Benutzen Sie die folgenden Näherungen $S^+_i = \sqrt{2S} a_i$ und $S^-_i = \sqrt{2S} a^\dagger_i$ und berücksichtigen Sie nur Terme der zwei höchsten Ordnungen in S.)

b) Benutzen Sie $a^\dagger_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ und $a_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} a_{\boldsymbol{k}}$, um H durch $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ und $a_{\boldsymbol{k}}$ darzustellen.