



**Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik**  
**Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 6**

Ausgabe: 24.11.2014, Abgabe: 1.12.2014, Übungen: 4.12.2014 und 5.12.2014

**Aufgabe 16: Teilchenzahldarstellung**

Ein antisymmetrisierter fermionischer Basiszustand lässt sich ausdrücken als

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1} \left(\hat{a}_2^\dagger\right)^{n_2} \dots |0\rangle \quad n_i \in \{0, 1\}.$$

Der Vakuumzustand  $|0\rangle$  ist definiert durch  $\hat{a}_i |0\rangle = 0$  ( $\forall i$ ), wobei für die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die folgenden Vertauschungsrelationen gelten:

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

und

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = \{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen, dass  $n_i \in \{0, 1\}$  ( $\forall i$ ). Wie nennt man diese Eigenschaft?

b) Der *Teilchenzahloperator* ist definiert durch  $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \hat{n}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \\ [\hat{n}_i, \hat{a}_j] &= -\hat{a}_j \delta_{ij} \\ [\hat{n}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \hat{a}_j^\dagger \delta_{ij} \\ [\hat{n}_i, \hat{n}_j] &= 0 \\ \hat{n}_i^2 &= \hat{n}_i \quad (\forall i) \end{aligned}$$

**Aufgabe 17: Bosonisierung des Spins (schriftlich)**

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}^\dagger$  und  $\hat{a}$  erfüllen die bosonischen Vertauschungsrelationen  $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}] = 0$  und  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ .

a) Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{L}_z &= \hbar (l - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ \hat{L}_+ &= \hbar \sqrt{2l - \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} \\ \hat{L}_- &= \hbar \hat{a}^\dagger \sqrt{2l - \hat{a}^\dagger \hat{a}} \end{aligned}$$

die Drehimpulsalgebra in der Form  $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$  und  $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$  erfüllen.

b) Berechnen Sie  $\hat{\mathbf{L}}^2$  und interpretieren Sie die Variable  $l$ .

c) *Physikalischer Kontext*: Angenommen, man würde einen Ferromagneten als großen Spin beschreiben. Welche Quasiteilchen würden dann von den Operatoren  $\hat{a}^\dagger$  und  $\hat{a}$  erzeugt/vernichtet? Erhöhen oder verringern diese Quasiteilchen die Magnetisierung?

*Anmerkung*: Diese Darstellung der Drehimpulsoperatoren geht auf T. Holstein und H. Primakoff zurück (Phys. Rev. **58**, 1098 (1940)).

### **Aufgabe 18: Wirkungsquerschnitt**

Es sei bei reiner  $s$ -Streuung der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a; \quad a > 0$$

gemessen worden. Bestimmen Sie die komplexe Streuamplitude  $f(\vartheta)$ .