UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
http://tinyurl.com/2014qm2

**Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik**
**Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 5**
Ausgabe: 17.11.2014, Abgabe: 24.11.2014, Übungen: 27.11.2014 und 28.11.2014

### Aufgabe 13: Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt (schriftlich)

a) Finden Sie in der Bornschen Näherung die Streuamplitude und den totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung des Teilchens der Masse $m$ an einem zentralsymmetrischen Potential:

$$U(r) = U_0 \mathrm{e}^{-r^2/R^2} .$$

*Hinweis:* Sie können $\int_0^\infty e^{-x^2/a^2} \sin(x) x \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} |a|^3 e^{-a^2/4}$ benutzen.

b) Geben Sie den Bereich der Anwendbarkeit der Bornschen Näherung in diesem Fall an.
*Hinweise:*

- Die Bornsche Näherung gilt, wenn bei der Darstellung $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{k}}^{\mathrm{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r})$ die Annahme $|\psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r})| \ll |\psi_{\mathbf{k}}^{\mathrm{in}}(\mathbf{r})| = 1$ gerechtfertigt ist.

- Schreiben Sie zuerst $\psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r})$ in der Bornschen Näherung für beliebige (nicht unbedingt kleine) $\mathbf{r}$ explizit auf.

- Überzeugen Sie sich, dass $|\psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r})|$ den Maximalwert im Falle $k \to 0$ (langsame Teilchen) erreicht, d.h. $|\psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r})| \leq |\psi_{k\to 0}^{(1)}(\mathbf{r})|$.

- Mit Hilfe der Gleichung $$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') ,$$
  wobei $r_<$ ($r_>$) den kleineren (großeren) von $r$ und $r'$ bezeichnet, beweisen Sie die Ungleichung $|\psi_{k\to 0}^{(1)}(\mathbf{r})| \leq |\psi_{k\to 0}^{(1)}(0)|$.

- Berechnen Sie $|\psi_{k\to 0}^{(1)}(0)|$ und benutzen Sie dann die oben aufgeführten Ungleichungen, um die einschränkende Bedingung für $U_0$ zu finden.

### Aufgabe 14: Zeitabhängige Störungstheorie

Ein linearer harmonischer Oszillator mit der Masse $m$ und der Ladung $q$ befinde sich in einem elektrischen Wechselfeld ($\hat{\mathbf{e}}_z$: Einheitsvektor in $z$-Richtung):

$$\mathbf{F}(t) = F \hat{\mathbf{e}}_z \cos \omega t.$$

Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Abhängigkeit des Erwartungswertes des elektrischen Dipolmoments

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle \psi | q z | \psi \rangle$$

von der Frequenz $\omega$. Nehmen Sie dazu an, dass sich vor dem Einschalten des Feldes zur Zeit $t = 0$ der Oszillator im Eigenzustand $|E_n^{(0)}\rangle = |n\rangle$ befand.

**Aufgabe 15: WKB-Methode (nach Wentzel, Kramers und Brillouin)**

Suchen Sie die allgemeine Lösung der eindimensionalen stationären Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse $m$ mit Energie $E$ in einem Potenzial $V(x) < E$ mit dem Ansatz $\psi(x) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}W(x)}$, wobei Sie die Funktion $W(x)$ formell als eine Potenzreihe in $\hbar$ darstellen (WKB-Ansatz)

$$W(x) = W_0(x) + \frac{\hbar}{i}W_1(x) + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 W_2(x) + ...$$

Berücksichtigen Sie nur die Terme nullter und erster Ordnung in $\hbar$, lösen Sie die entsprechenden Differentialgleichungen und finden Sie in dieser Näherung die Wellenfunktion $\psi(x)$. Wie sieht die Lösung im Bereich mit $V(x) > E$ aus?