UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
http://tinyurl.com/2014qm2

**Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik**
**Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 4**
Ausgabe: 10.11.2014, Abgabe: 17.11.2014, Übungen: 20.11.2014 und 21.11.2014

## Aufgabe 10: Fermis Goldene Regel für periodische Störung (schriftlich)

Verwenden Sie die zeitabhängige Störungstheorie für eine periodische Störung

$$\hat{V}(t) = \hat{F}e^{i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{-i\omega t} ,$$

die am Zeitpunkt $t = 0$ einsetzt. $\hat{F}$ ist hierbei ein zeitunabhängiger Operator.

a) Betrachten Sie den Übergang zwischen den beiden Zusänden $|n\rangle$ und $|m\rangle$ mit den Energien $E_n = \hbar\omega_n$ und $E_m = \hbar\omega_m$. Vor der Störung befindet sich das System im Zustand $|n\rangle$. Berechnen Sie die Übergangsamplitude $c_{mn}^{(1)}$ in erster Ordnung Störungstheorie in Abhängigkeit von $\hat{F}$ und $\hat{F}^\dagger$.

b) Diskutieren Sie die Übergangsamplitude in der Näherung, wenn $\omega \approx \omega_{mn} = \omega_m - \omega_n$ gilt.

c) Betrachten Sie den Grenzfall $t \to \infty$ und berechnen Sie die Übergangsrate $W_{mn} = \frac{d}{dt}|c_{mn}^{(1)}(t)|^2$.

## Aufgabe 11: Greensche Funktion der stationären Schrödingergleichung

a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf die Form

$$\left(\Delta + k^2\right)\psi(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \tag{1}$$

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, definiert durch

$$\left(\Delta + k^2\right)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ,$$

zur Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (1).

*Hinweise :*

- Finden Sie zuerst eine Darstellung der Fourier-transformierten Greenschen Funktion $G(\mathbf{q})$.
- Verwenden Sie $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ als Polarachse und bringen Sie $G(\mathbf{R})$ auf die Form

  $$G(\mathbf{R}) = \frac{i}{8\pi^2 R}\left(D_+ + D_-\right) ,$$

  mit

  $$D_\pm = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqR}}{q \pm k} dq .$$

- Betrachten Sie zuerst $k' = k \pm i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) anstatt $k$, benutzen Sie dann den Residuensatz (im Zusammenhang mit der Lemma von Jordan), um $D_\pm$ zu bestimmen, und lassen Sie anschließend $\epsilon$ gegen Null streben.

## Aufgabe 12: Partialwellenzerlegung einer ebenen Welle

Entwickeln Sie die ebene Welle $e^{i\mathbf{kr}} = e^{ikr\cos\theta}$ in eine Reihe von Partialwellen nach der Drehimpulsquantenzahl $l$. Ebene Wellen sind bekanntermaßen Lösungen der Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen. Man kann das System aber auch als Zentralkraftproblem mit verschwindendem Potential auffassen. Beginnen Sie mit eben diesem Ansatz.

*Hinweise:*

- Die Lösungen der Differentialgleichung $\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1\right] f_l(\rho) = 0$, die im Ursprung nicht singulär sind, heissen sphärische Bessel-Funktionen und werden mit $j_l(\rho)$ bezeichnet.
- Für $\rho \to \infty$ gilt $j_l(\rho) \sim \frac{1}{\rho}\sin(\rho - l\frac{\pi}{2})$.
- Für die Legendre-Polynome gilt $\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x P_l(x) P_n(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ln}$.
- Es gilt ferner $P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$.