UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
http://tinyurl.com/2014qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 3
Ausgabe: 3.11.2014, Abgabe: 10.11.2014, Übungen: 13.11.2014 und 14.11.2014

Aufgabe 7: Abbildung $\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$: Teil 1 (schriftlich)

Um zwischen den Matrizengruppen SU(2) und SO(3) eine Verbindung herzustellen, betrachet man die Transformation

$$\mathbf{r} \longmapsto \mathbf{r}' \equiv R\mathbf{r} \quad \text{mit} \quad U\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}U^\dagger = \mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\sigma} \ ,$$

wobei $U \in \mathrm{SU}(2)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, und $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^{\mathrm{T}}$ den Vektor der Pauli-Matrizen bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass R ein linearer Operator ist und dass dieser Operator Winkel und Abstände zwischen Vektoren nicht verändert.

Hinweis: betrachten Sie, wie sich das Skalarprodukt von zwei Vektoren bei dieser Transformation verändert und benutzen Sie dabei die Eigenschaft $\mathrm{Sp}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$.

b) Zeigen Sie, dass in der Basis der kartesischen Koordinaten die Komponenten von R als

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(\sigma_i U \sigma_j U^\dagger\right)$$

ausgedrückt werden können.

c*) Benutzen Sie eine mögliche Parametrisierung von U durch die Komponenten des Einheitsvektors $\mathbf{n}$ und den Winkel α als $U = e^{i\alpha\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$, um R_{ij} durch diese Parameter zu bestimmen:

$$R_{ij} = \cos 2\alpha\, \delta_{ij} + \sin 2\alpha\, \epsilon_{ijk} n_k + (1 - \cos 2\alpha) n_i n_j \ ,$$

wobei hier die Einstein'sche Summenkonvention verwendet wurde. Welcher Transformation des dreidimensionalen Vektorraums entspricht dann R im Allgemeinen?

Hinweis: Benutzen Sie $e^{i\alpha\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\alpha$, das Ergebnis der Aufgabe 2b und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ij'k'} = \delta_{jj'}\delta_{kk'} - \delta_{jk'}\delta_{kj'}$.

d) Stellen Sie die Matrizen R in den Fällen $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ auf. Welche Rotationen führen Sie durch?

Aufgabe 8: Abbildung $\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$: Teil 2

a) Zeigen Sie unter Benutzung von 7c, dass die Matrizen R zu SO(3) gehören.

Hinweis: Dazu muss man nachweisen, dass die Komponenten von R reell sind und $R^{\mathrm{T}}R = \mathbb{1}$, $\det R = 1$ gilt. Die Relationen aus den Hinweisen zu Aufgabe 7 können dabei nützlich sein.

b) Argumentieren Sie, warum die Abbildung $\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ mit $U \longmapsto R$ einen Homomorphismus darstellt. D.h. für jede Matrix $R \in \mathrm{SO}(3)$ existiert mindestens eine Matrix $U \in \mathrm{SU}(2)$, die die entsprechende Rotation erzeugt, und beliebige U_1, U_2 aus SU(2) zu $R(U_1U_2) = R(U_1)R(U_2)$ führen.

Aufgabe 9: Permutationsgruppe S_4 und ihre irreduziblen Darstellungen

Betrachten Sie alle möglichen Permutationen von 4 Teilchen.

a) Zeigen Sie, dass diese Permutationen eine Gruppe bilden.

b) Erstellen Sie alle möglichen Young-Diagramme für diese Gruppe und verteilen Sie die Zahlen von 1 bis $N = 4$ auf die Kästchen dieser Diagramme so, dass Sie die sogenannten Normaltableaux Θ_λ bekommen, wobei λ hier dann die entsprechende Zykelstruktur bezeichnet. Beschreiben Sie die Operationen, die im Zusammenhang mit den Young-Diagrammen zu den irreduziblen Darstellungen von S_4 führen.

Hinweis: Im Normaltableau treten die Zahlen von 1 bis N von links nach rechts und von der oberen Zeile zu der unteren Zeile (wie man Bücher liest) in der strikten aufsteigenden Reihenfolge auf.

c) Die Spur der Matrix $P = \mathcal{D}_i(p)$, die dem Gruppenelement p in der Darstellung $\mathcal{D}_i$ entspricht, heißt *Charakter* des Elements p in dieser Darstellung: $\chi_i(p)$. Zeigen Sie, dass alle Elemente einer Klasse den gleichen Charakter besitzen.

d) Da die Anzahl von Young-Diagrammen die Anzahl der Klassen in der Gruppe angibt, und die Anzahl der Klassen der Anzahl der irreduziblen Darstellungen entspricht, können Sie die Anzahl der irreduziblen Darstellungen von S_4 bestimmen. Bestimmen Sie dann auch die Dimensionen dieser Darstellungen, indem Sie die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_i [\chi_i(\Theta_\lambda)]^* \chi_i(\Theta_\lambda) = \frac{n}{n_\lambda}$$

auf die Klasse anwenden, die nur das triviale Element enthält (für jede Gruppe gibt es immer eine solche Klasse, hier ist es $\Theta_{[4]}$). Hier ist $\chi_i(\Theta_\lambda)$ der Charakter der Klasse Θ_λ (aller Elemente dieser Klasse) in der Darstellung $\mathcal{D}_i$, n ist die Anzahl der Elemente in der ganzen Gruppe und n_λ ist die Anzahl der Elemente in der Klasse Θ_λ.

Hinweis: Die Darstellungen des trivialen Elements sind immer Einheitsmatrizen der jeweiligen Dimension.

e) Erstellen Sie alle möglichen Standardtableaux für diese Gruppe. Welchen Zusammenhang sehen Sie zwischen der Anzahl der Standardtableaux und der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen?

Hinweis: Im Standardtableau treten die Zahlen von 1 bis N in einer aufsteigenden (aber nicht unbedingt ununterbrochenen) Reihenfolge in jeder Zeile von links nach rechts und in jeder Spalte von oben nach unten.